反射テスト　解析　漸化式から母関数　01

1.　次の漸化式をもつ数列の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ．また領域と数列の一般項も求めよ．
$a_0 = 1$, $a_1 = 1$ かつ，漸化式 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$　$(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が成立．

2. 次の漸化式をもつ数列の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ. また領域と数列の一般項も求めよ.

$a_0 = 1$ かつ, 漸化式 $a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 an - 1 + a_2 an - 2 + \cdots + a_n a_0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が成立.

反射テスト　解析　漸化式から母関数　01　解答解説

1.　次の漸化式をもつ数列の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ．また領域と数列の一般項も求めよ．

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$ かつ，漸化式 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$　($n = 0, 1, 2, 3, \cdots$) が成立．

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$xf(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots + a_n x^{n+1} + \cdots$

漸化式から，

$f(x) + xf(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x(a_1 + a_2)x^2 + (a_2 + a_3)x^3 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)x^n + \cdots$

$(1 + x)f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \cdots$

$1 + x(1 + x)f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

$1 + (x + x^2)f(x) = f(x)$

$1 + (x + x^2)f(x) = f(x)$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}}$$

これが成り立つ領域を調べる．

$1 - x - x^2 = 0$ の解は，$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ．

$\alpha = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ とすると，

$$f(x) = -\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{\beta - \alpha}\left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta}\right)$$

$$\frac{1}{x - \alpha} = -\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x^3}{\alpha^3} + \cdots + \frac{x^n}{\alpha^n} + \cdots\right)$$

よって，公比の絶対値が 1 未満であればよいので，$\left|\dfrac{x}{\alpha}\right| < 1$

βに関しても同様に考えて，$\left|\dfrac{x}{\beta}\right| < 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\alpha^k} + \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\beta^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta - \alpha}\left(\frac{1}{\beta^{k+1}} - \frac{1}{\alpha^{k+1}}\right)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}x^k \end{aligned}$$

よって一般項は　$F_n = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$

収束条件は　$\left|\dfrac{x}{\alpha}\right| < 1$ かつ $\left|\dfrac{x}{\beta}\right| < 1$　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}}$

★ フィボナッチ数列　$\boldsymbol{F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$

2. 　次の漸化式をもつ数列の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ．また領域と数列の一般項も求めよ．

$a_0=1$ かつ，漸化式 $a_{n+1}=a_0a_n+a_1an-1+a_2an-2+\cdots+a_na_0 \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$ が成立．

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots$

$\{f(x)\}^2=a_0^2+(a_0a_1+a_1a_0)x+(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)x^2+(a_0a_3+a_1a_2+a_2a_1+a_3a_0)x^2+\cdots$

$\qquad =a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+\cdots$

$\therefore x\{f(x)\}^2+a_0=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$

$y=f(x)$ とおくと，$xy^2+1=y \quad \Leftrightarrow \quad xy^2-y+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$

$x\to 0$ のとき，

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{4x}{2x\left(1+\sqrt{1-4x}\right)}=\frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}\to 1$$

$$\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{4x}{2x\left(1-\sqrt{1-4x}\right)}=\frac{2}{1-\sqrt{1-4x}} \text{ は発散.}$$

$x=0$ で連続になることを考えると，　$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}}$

実数値関数であるから，$1-4x\geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\leqq\dfrac{1}{4}$.

$g(x)=\sqrt{1-4x}$ とおくと，$g(0)=1$.

$\dfrac{d^n}{dx^n}\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{-3}{2}\cdot\dfrac{-5}{2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3-2n}{2}\cdot x^{\frac{1-2n}{2}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ であるから，

$g^{(n)}(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{-3}{2}\cdot\dfrac{-5}{2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3-2n}{2}\cdot(-4)^n(1-4x)^{\frac{1-2n}{2}}$

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(0)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{-5}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{3-2n}{2}\cdot(-4)^n\\
&=-2^n\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)\\
&=-2^n\cdot\frac{(2n-2)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\\
&=-2^n\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}\\
&=-2^n\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\\
&=-\frac{2^n}{2^{n-1}}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)!}\\
&=-2(n-1)!\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\\
&=-2(n-1)!\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}
\end{aligned}$$

$g'(0)=-2\cdot 0!\cdot{}_0\mathrm{C}_0=-2$, $g''(0)=-2\cdot 1!\cdot{}_2\mathrm{C}_1=-4$, $g'''(0)=-2\cdot 2!\cdot{}_4\mathrm{C}_2=-24$, $\cdots$, $g^{(n+1)}(0)=-2\cdot n!\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_n$

$f(x)=\dfrac{1-g(x)}{2x}$ 　であるから，

$$\begin{aligned}
2xf(x)&=1-g(x)=1-\left\{g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{g^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots\right\}\\
&=2x+2x^2+4x^3+\cdots+\frac{2\cdot n!\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_n}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots
\end{aligned}$$

$f(x)=1+1x+2x^2+\cdots+\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}x^n+\cdots \quad \Rightarrow \quad$ 数列の一般項は　$C_n=\boldsymbol{\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}}$ 　　★カタラン数

$f(x)$ の収束するための条件を調べる．$n\to\infty$ のとき，

$$\frac{C_{n+1}}{C_n}=\frac{(2n+2)!\cdot x^{n+1}}{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(n+2)}\cdot\frac{n!\cdot n!\cdot(n+1)}{(2n)!\cdot x^n}=\frac{(2n+2)(2n+1)x}{(n+1)(n+2)}=\frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}\to 4x$$

よって，実数値関数の条件と $|4x|<1$ から，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{4}}$