反射テスト　解析　数列から母関数　02

1.　正の実数 r に対して，等比数列 $a_n = r^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ．また領域も求めよ．

（ S 級 1 分 40 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

2. 等差数列 $a_n = p + nq \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ. また領域も求めよ.

(S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分)

反射テスト　解析　数列から母関数　02　解答解説

1.　正の実数 r に対して，等比数列 $a_n = r^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ．また領域も求めよ．

（ S 級 1 分 40 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

★ 母関数（ *generating function* ）

数列 a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のに対して，

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

を母関数または生成関数（ *generating function* ）という．

マクローリン展開する前の無限級数でない方を閉じた形という．

$f(x) = r^0 + r^1 x + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \cdots + r^n x^n + \cdots$

これは等比級数．$|\, r^n x^n \,| < 1$ であれば収束するから，$|\, x \,| < \dfrac{1}{r}$ ．

このとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 - rx} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{1 - rx}} \quad \textbf{かつ} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{r} < x < \frac{1}{r}} \end{aligned}$$

2. 等差数列 $a_n = p + nq \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ．また領域も求めよ．

（S 級 1 分 40 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分）

$f(x) = p + (p+q)x + (p+2q)x^2 + (p+3q)x^3 + \cdots + (p+4q)x^n + \cdots$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ かつ $|\,x\,| < 1$

$\dfrac{p}{1-x} = p + px + px^2 + px^3 + \cdots + px^n + \cdots$

$\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \cdots$

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \cdots$

$\dfrac{qx}{(1-x)^2} = qx + 2qx^2 + 3qx^3 + \cdots + nqx^n + \cdots$

$n \to \infty$ のとき $\dfrac{nq}{x^n} \to 0$ になるためには，$|\,x\,| < 1$

よって，母関数は，

$f(x) = \boldsymbol{\dfrac{p}{1-x} + \dfrac{qx}{(1-x)^2}}$ **かつ** $\boldsymbol{-1 < x < 1}$