

反射テスト 解析 数列から母関数 01

1. 次の数列の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ. また領域も求めよ.

(1) 数列 $a_n = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

(2) 数列 $a_n = n + 1$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

2. 次の数列の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ. また領域も求めよ.

(1) 数列 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

(2) 数列 $a_n = n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

反射テスト 解析 数列から母関数 01 解答解説

1. 次の数列の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ. また領域も求めよ.

★ 母関数 (generating function)

数列 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) のに対して,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

を母関数または生成関数 (generating function) という.

マクローリン展開する前の無限級数でない方を閉じた形という.

- (1) 数列 $a_n = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$f(x) = 2^0 + 2^1 x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + \dots + 2^n x^n + \dots$$

これは等比級数. 等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の極限は, $\frac{a}{1-r}$ であるから,

初項が 1, 公比 $2x$ の数列の極限は, $\frac{1}{1-2x}$ かつ $|2x| < 1$

よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-2x} \\ &= \frac{1}{1-2x} \quad \text{かつ} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (2) 数列 $a_n = n + 1$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad \text{かつ} \quad |x| < 1$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \dots$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $(n+1)x^n \rightarrow 0$ になるためには, $|x| < 1$ ←☆

よって, 母関数は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{かつ} \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

☆ [ダランベールの収束判定法](http://www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html) 参照.

2. 次の数列の母関数 $f(x)$ を閉じた形で求めよ. また領域も求めよ.

(1) 数列 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

$$f(x) = 2 + 1x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}x^n + \dots$$

これは等比級数. 等比数列 $a_n = ar^{n-1}$ の極限は, $\frac{a}{1-r}$ であるから,

第1項が2, 公比 $\frac{x}{2}$ の数列の極限は, $\frac{2}{1-\frac{x}{2}}$ かつ $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$

よって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{1-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{4}{2-x} \quad \text{かつ} \quad -2 < x < 2 \end{aligned}$$

(2) 数列 $a_n = n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

$$f(x) = 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad \text{かつ} \quad |x| < 1$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \dots$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $(n+1)x^n \rightarrow 0$ になるためには, $|x| < 1$ ←☆

よって, 母関数は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{かつ} \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

☆[ダランベールの収束判定法](http://www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)参照.