反射テスト　解析　母関数から数列　01

1.　次の母関数 $f(x)$ をもつ数列 a_n を求めよ. 証明は不必要.

(1)　$|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

(2)　$|x|<2$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$

(3)　$|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

2. 次の母関数 $f(x)$ をもつ数列 a_n を求めよ. 証明は不必要.

(1) $|x| < 1$ のとき, $f(x) = \dfrac{3}{1-x}$

(2) $|x| < \dfrac{1}{2}$ のとき, $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

(3) $|x| < 1$ のとき, $f(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$

反射テスト　解析　母関数から数列　01　解答解説

1.　次の母関数 $f(x)$ をもつ数列 a_n を求めよ. 証明は不必要.

★ 母関数 (*generating function*)
数列 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ のに対して,
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
を母関数または生成関数 (*generating function*) という.
マクローリン展開する前の無限級数でない方を閉じた形という.

(1)　$|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

まずはマクローリン展開をする.
$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\ ,\ f'''(x)=\frac{3!}{(1-x)^4}\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\ .$$
$n=1,2,3,\cdots$ に対して, $f^{(n)}(0)=n!$ となるから,
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f'(0)}{3!}x^3+\cdots \\ &= 1+\frac{1!}{1!}x+\frac{2!}{2!}x^2+\frac{3!}{3!}x^3+\cdots \\ &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{a_n=1\quad(n=0,1,2,3,\cdots)}$

(2)　$|x|<2$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$

$$f'(x)=\frac{1}{(2-x)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{2!}{(2-x)^3}\ ,\ f'''(x)=\frac{3!}{(2-x)^4}\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(2-x)^{n+1}}\ .$$
$n=1,2,3,\cdots$ に対して, $f^{(n)}(0)=\dfrac{n!}{2^{n+1}}$ となるから,
$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f'(0)}{3!}x^3+\cdots \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1!}{2^2\cdot 1!}x+\frac{2!}{2^3\cdot 2!}x^2+\frac{3!}{2^4\cdot 3!}x^3+\cdots \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}x^n+\cdots \end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\quad(n=0,1,2,3,\cdots)}$

(3)　$|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \\ &= (1+x)\frac{d}{dx}\left(1+1x+1x^2+1x^3+\cdots+1x^n+\cdots\right) \\ &= (1+x)\left(0+1+2x+3x^2+\cdots+nx^{(n-1)}+\cdots\right) \\ &= \left(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\right)+x\left(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\right) \\ &= \left\{1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\cdots\right\}+\left(0+x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots\right) \\ &= 1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+(2n+1)x^n+\cdots \end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{a_n=2n+1\quad(n=0,1,2,3,\cdots)}$

☆ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{1!}{(1-x)^2}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1!}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

2. 次の母関数 $f(x)$ をもつ数列 a_nを求めよ. 証明は不必要.

(1) $|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{3}{1-x}$

まずはマクローリン展開をする.

$$f'(x)=\frac{3}{(1-x)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{3\cdot 2!}{(1-x)^3}\ ,\ f'''(x)=\frac{3\cdot 3!}{(1-x)^4}\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x)=\frac{3\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}\ .$$

$n=1,2,3,\cdots$ に対して, $f^{(n)}(0)=n!$ となるから,

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f'(0)}{3\cdot 3!}x^3+\cdots\\&=3+\frac{3\cdot 1!}{1!}x+\frac{3\cdot 2!}{2!}x^2+\frac{3!}{3!}x^3+\cdots\\&=3+3x+3x^2+3x^3+\cdots+3x^n+\cdots\end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{a_n=3\quad(n=0,1,2,3,\cdots)}$

(2) $|x|<\dfrac{1}{2}$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$

$$f'(x)=\frac{2}{(1-2x)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{4\cdot 2!}{(1-2x)^3}\ ,\ f'''(x)=\frac{8\cdot 3!}{(1-2x)^4}\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x)=\frac{2^n\cdot n!}{(1-2x)^{n+1}}\ .$$

$n=1,2,3,\cdots$ に対して, $f^{(n)}(0)=2^n\cdot n!$ となるから,

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f'(0)}{3!}x^3+\cdots\\&=1+\frac{2\cdot 1!}{1!}x+\frac{2^2\cdot 2!}{2!}x^2+\frac{2^3\cdot 3!}{3!}x^3+\cdots\\&=1+2x+4x^2+8x^3+\cdots+2^nx^n+\cdots\end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{a_n=2^n\quad(n=0,1,2,3,\cdots)}$

(3) $|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{2-x}{(1-x)^2}$

$$\begin{aligned}f(x)&=(2-x)\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\\&=(2-x)\frac{d}{dx}\left(1+1x+1x^2+1x^3+\cdots+1x^n+\cdots\right)\\&=(2-x)\left(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{(n-1)}+\cdots\right)\\&=2\left\{1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\cdots\right\}\ -x\left(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{(n-1)}+\cdots\right)\\&=\left\{2+4x+6x^2+\cdots+2nx^{n-1}+2(n+1)x^n+\cdots\right\}\ -\left(0+x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots\right)\\&=2+3x+4x^2+\cdots+(n+2)x^n+\cdots\end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{a_n=n+2\quad(n=0,1,2,3,\cdots)}$

☆ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{1!}{(1-x)^2}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1!}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$