反射テスト　解析　マクローリン展開　03

1.　次の関数をマクローリン展開せよ. また解析関数になるための **領域も求めよ**.

(1)　$f(x) = \dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$

(2)　$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 1}$

2. 次の関数をマクローリン展開せよ. また解析関数になるための **領域も求めよ**.

(1) $|x| < 1$ のとき, $f(x) = \dfrac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$

反射テスト　解析　マクローリン展開　03　解答解説

1.　次の関数をマクローリン展開せよ．また解析関数になるための **領域も求めよ**．

★ マクローリン展開 (*Maclaurin expansion*)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

これが収束するような領域をもつとき，$f(x)$ を解析関数という．

(1)　$f(x)=\dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}$

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x(x+1)}{2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1-x}\\
&=\frac{x(x+1)}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(1+1x+1x^2+1x^3+1x^4+\cdots+1x^n+\cdots\right)\ \text{かつ}\ |x|<1\\
&=\frac{x(x+1)}{2}\frac{d}{dx}\left(0+1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{(n-1)}+\cdots\right)\\
&=\frac{x^2+x}{2}\left(2+6x+12x^2+\cdots+(n-1)nx^{(n-2)}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(2x^2+6x^3+12x^4+\cdots+(n-1)nx^n+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(2x+6x^2+12x^3+\cdots+(n-1)nx^{(n-1)}+n(n+1)x^n+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{2}\left\{2x+8x^2+18x^3+\cdots+(n^2-n+n^2+n)x^n+\cdots\right\}\\
&=\boldsymbol{x+4x^2+9x^3+16x^4+\cdots+n^2x^n+\cdots\quad\text{かつ}\ -1<x<1}
\end{aligned}$$

☆これは数列 $a_n=n^2$ の母関数である．

☆ $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{2!}{(1-x)^2}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-1}$

$x^2-2x-1=0\quad\Leftrightarrow\quad x=1\pm\sqrt{2}$

$\alpha=1-\sqrt{2}$，$\beta=1+\sqrt{2}$ とおくと，

$$f(x)=\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)$$

$$\frac{1}{x-\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{x}{\alpha}+\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{x^3}{\alpha^3}+\cdots+\frac{x^n}{\alpha^n}+\cdots\right)\ \text{かつ}\ \left|\frac{x}{\alpha}\right|<1\ \text{であるから，}$$

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\\
&=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\alpha^k}+\frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\beta^k}\right)\quad\text{かつ}\ \left|\frac{x}{\alpha}\right|<1\ \text{かつ}\ \left|\frac{x}{\beta}\right|<1\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta^{k+1}}-\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right)x^k\quad\text{かつ}\ \left|\frac{x}{\alpha}\right|<1\ \text{かつ}\ \left|\frac{x}{\beta}\right|<1\\
&=\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{(1-\sqrt{2})^{k+1}}-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^{k+1}}\right\}x^k\quad\text{かつ}\ 1-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}-1}
\end{aligned}$$

☆整式の筆算 $1\div(-1-2x+x^2)$ を行うと，

$f(x)=-1+2x-5x^2+12x^3-29x^4+\cdots$

$k=0$ のとき，$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)=-1$

これだけでもかなり精度の高い見直しができる．

2. 次の関数をマクローリン展開せよ．また解析関数になるための **領域も求めよ**．

(1) $|x|<1$ のとき，$f(x)=\dfrac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x(x^2+4x+1)}{3!}\frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{1-x} \quad \text{かつ } |x|<1\\
&=\frac{x(x^2+4x+1)}{6}\frac{d^3}{dx^3}\left(1+1x+1x^2+1x^3+\cdots+1x^n+\cdots\right)\\
&=\frac{x(x^2+4x+1)}{6}\frac{d^2}{dx^2}\left(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\right)\\
&=\frac{x(x^2+4x+1)}{6}\frac{d}{dx}\left(2+6x+12x^2+20x^3+\cdots+(n-1)nx^{n-2}+\cdots\right)\\
&=\frac{x^3+4x^2+x}{6}\left(6+24x+60x^2+120x^3+\cdots+(n-2)(n-1)nx^{n-3}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{6}\left\{x^3\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)(k+3)x^k+4x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)(k+3)x^k+x\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)(k+3)x^k\right\}\\
&=\frac{1}{6}\left\{\sum_{k=3}^{\infty}(k-2)(k-1)kx^k+\sum_{k=2}^{\infty}4(k-1)k(k+1)x^k+\sum_{k=1}^{\infty}k(k+1)(k+2)x^k\right\}\\
&=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}x+\frac{1}{6}(4\cdot1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4)x^2+\frac{1}{6}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{(k-2)(k-1)k+4(k-1)k(k+1)+k(k+1)(k+2)x^k\right\}x^k\\
&=\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty}k^3x^k \quad \text{かつ} \quad -1<x<1}
\end{aligned}
$$

☆これは数列 $a_n=n^3$ の母関数である．

☆ $\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{3!}{(1-x)^3} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{(1-x)^3}=\dfrac{1}{3!}\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$

$1-x-x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ，$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

$$f(x)=-\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)$$

$\dfrac{1}{x-\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}\left(1+\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{x^3}{\alpha^3}+\cdots+\dfrac{x^n}{\alpha^n}+\cdots\right)$ かつ $\left|\dfrac{x}{\alpha}\right|<1$ であるから，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=-\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\\
&=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\alpha^k}+\frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\beta^k}\right) \quad \text{かつ } \left|\frac{x}{\alpha}\right|<1 \text{ かつ } \left|\frac{x}{\beta}\right|<1\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\beta^{k+1}}-\frac{1}{\alpha^{k+1}}\right)x^k\\
&=\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}x^k \quad \text{かつ} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}}
\end{aligned}
$$

☆整式の筆算 $1\div(1-x-x^2)$ を行うと，

$f(x)=1+1x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+\cdots+F_nx^n+\cdots$

★ **フィボナッチ数列** の母関数であることがわかる．

また，$k=0,1,2$ くらいまでは見直ししてみるとよい．