反射テスト　解析　マクローリン展開　02

1.　次の関数をマクローリン展開せよ.

(1)　$|\,x\,| < 1$ のとき，$f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

(2)　$|\,x\,| < 1$ のとき，$f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

2. 次の関数をマクローリン展開せよ.

(1) $|x| < 1$ のとき, $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^3}$

(2) $|x| < 1$ のとき, $f(x) = \dfrac{1}{2-3x+x^2}$

反射テスト　解析　マクローリン展開　02　解答解説

1.　次の関数をマクローリン展開せよ.

★ テイラー展開 (*Taylor expansion*)

$x=a$ の近くで無限回微分可能な実数値関数 $f(x)$ に対して,

$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ を関数 f の点 a 近傍のテイラー級数 (*Taylor series*) という.

テイラー級数が収束し, 元の関数 f に一致するとき, f はテイラー展開 (*Taylor expansion*) 可能という.

領域上の各点でテイラー展開が可能な関数を解析的といい, 解析関数 (*analytic function*) という.

★ マクローリン展開 (*Maclaurin expansion*)

$a=0$ のときのテイラー級数をマクローリン級数 (*Maclaurin series*),

テイラー展開をマクローリン展開 (*Maclaurin expansion*) とよぶ.

マクローリン展開可能であれば解析関数 $f(x)$ は次のように表せる.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

☆別解　ちなみに, $f(x)$ の閉じた形が $\dfrac{\text{整式}}{\text{整式}}$ の形であれば, 筆算を用いて整式の割り算をするという方法もある.

最初のいくつかの項だけ欲しいとか, 一般項の推定をしたいときに使える.

(1)　$|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$

$$\begin{aligned}f(x)&=x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\\&=x\frac{d}{dx}\left(1+1x+1x^2+1x^3+\cdots+1x^n+\cdots\right)\\&=x\left(0+1+2x+3x^2+\cdots+nx^{(n-1)}+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{1x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots}\end{aligned}$$

☆分母が $(1-x)^n$ の場合の解法.

☆ $\dfrac{1}{1-x}$ のマクローリン展開については 1701 を参照.

☆ $$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)&=&\dfrac{1!}{(1-x)^2}\\\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)&=&\dfrac{2!}{(1-x)^3}\\\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)&=&\dfrac{3!}{(1-x)^3}\end{cases}$$

☆これは数列 $a_n=n$ の母関数である.

(2)　$|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{(1-x)(1+x)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\right)+\left(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\right)\right\}\\&=\boldsymbol{1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+\cdots}\end{aligned}$$

☆分母が 2 次式以上なら部分分数分解を用いる.

2. 次の関数をマクローリン展開せよ.

(1) $|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1-x} \\
&= \frac{x^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(1+1x+1x^2+1x^3+1x^4+\cdots+1x^n+\cdots\right) \\
&= \frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}\left(0+1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{(n-1)}+\cdots\right) \\
&= \frac{x^2}{2}\left(2+6x+12x^2+\cdots+(n-1)nx^{(n-2)}+\cdots\right) \\
&= \boldsymbol{x^2+3x^3+6x^4+\cdots+\frac{(n-1)n}{2}x^n+\cdots}
\end{aligned}
$$

☆分母が $(1-x)^n$ の場合の解法.

$$
☆\left\{
\begin{array}{ccc}
\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) & = & \dfrac{1!}{(1-x)^2} \\
\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) & = & \dfrac{2!}{(1-x)^3} \\
\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) & = & \dfrac{3!}{(1-x)^3}
\end{array}
\right.
$$

☆これは数列 $a_n=\dfrac{(n-1)n}{2}$ の母関数である.

(2) $|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{2-3x+x^2}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(1-x)(2-x)} \\
&= \frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x} \\
&= \left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n+\cdots}
\end{aligned}
$$

☆分母が 2 次式以上なら部分分数分解を用いる.