# 反射テスト　解析　マクロ―リン展開　01

**1.**　次の関数をマクローリン展開せよ.

(1)　$|\,x\,| < 1$ のとき，$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(2)　$f(x) = e^x$

(3)　$f(x) = \sin x$

**2.** 次の関数をマクローリン展開せよ.

(1) $|x| < \dfrac{1}{2}$ のとき, $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

(2) $-1 < x \leqq 1$ のとき, $f(x) = \log(1+x)$

(3) $f(x) = \cos x$

# 反射テスト　解析　マクローリン展開　01　解答解説

**1.**　次の関数をマクローリン展開せよ.

**★ テイラー展開 ( *Taylor expansion* )**

$x=a$ の近くで無限回微分可能な実数値関数 $f(x)$ に対して,

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ を関数 $f$ の点 $a$ 近傍のテイラー級数 ( *Taylor series* ) という.

テイラー級数が収束し, 元の関数 $f$ に一致するとき, $f$ はテイラー展開 ( *Taylor expansion* ) 可能という.

領域上の各点でテイラー展開が可能な関数を解析的といい, 解析関数 ( *analytic function* ) という.

**★ マクローリン展開 ( *Maclaurin expansion* )**

$a=0$ のときのテイラー級数をマクローリン級数 ( *Maclaurin series* ),

テイラー展開をマクローリン展開 ( *Maclaurin expansion* ) とよぶ.

マクローリン展開可能であれば解析関数 $f(x)$ は次のように表せる.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

(1)　$|x|<1$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\ ,\ f'''(x)=\frac{3!}{(1-x)^4}\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\ .$$

$n=1,2,3,\cdots$ に対して, $f^{(n)}(0)=n!$ となるから,

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\\&=1+\frac{1!}{1!}x+\frac{2!}{2!}x^2+\frac{3!}{3!}x^3+\cdots+\frac{n!}{n!}x^n+\cdots\\&=\boldsymbol{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots}\end{aligned}$$

☆これを基本形として覚えておくといい.

☆ $|x|\geqq 1$ のとき発散・振動するので, 領域は $|x|<1$ .

$f(-1)=1-1+1-1+\cdots$ となり, 偶数項までなら 0, 奇数項までなら 1 となって振動する.

(2)　$f(x)=e^x$

$f^{(n)}(x)=e^x$ より, $n=1,2,3,\cdots$ に対して, $f^{(n)}(0)=1$ となるから,

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\\&=\boldsymbol{1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots}\end{aligned}$$

☆ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ であるから, 実数全体で収束する. ダランベールの収束判定法を参照.

(3)　$f(x)=\sin x$

$f'(x)=\cos x\ ,\ f''(x)=-\sin x\ ,\ f'''(x)=-\cos x\ ,\ f''''(x)=\sin x\ .$

以下巡回する.

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\\&=\sin 0+\frac{\cos 0}{1!}x+\frac{-\sin 0}{2!}x^2+\frac{-\cos 0}{3!}x^3+\cdots\\&=\boldsymbol{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots}\\&=\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}\end{aligned}$$

☆実数全体で収束する. 理由は 1(2) と同様.

**2.**　次の関数をマクローリン展開せよ.

(1)　$|\,x\,| < \dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}\ ,\ f''(x) = \frac{4\cdot 2!}{(1-2x)^3}\ ,\ f'''(x) = \frac{8\cdot 3!}{(1-2x)^4}\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x) = \frac{2^n\cdot n!}{(1-2x)^{n+1}}\ .$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$f^{(n)}(0) = 2^n\cdot n!$ となるから，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{2\cdot 1!}{1!}x + \frac{2^2\cdot 2!}{2!}x^2 + \frac{2^3\cdot 3!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{2^n\cdot n!}{n!}x^n + \cdots \\ &= \boldsymbol{1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 2^n x^n + \cdots} \end{aligned}$$

☆ $|\,x\,| \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき発散・振動するので，領域は $|\,x\,| < \dfrac{1}{2}$ .
$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ となり，偶数項までなら 0，奇数項までなら 1 となって振動する.
☆別解　1(1) で $x$ を $2x$ と考える.

(2)　$-1 < x \leqq 1$ のとき，$f(x) = \log(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\ ,\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\ ,\ f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}\ ,\ f''''(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4}\ ,\ \cdots\ ,$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}\cdot(n-1)!$ となるから，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 0 + \frac{1\cdot 0!}{1!}x + \frac{-1\cdot 1!}{2!}x^2 + \frac{1\cdot 2!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{n!}x^n + \cdots \\ &= \boldsymbol{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \cdots} \end{aligned}$$

☆ $x > 1$ のとき，$n \to \infty$ に対して，$\dfrac{1}{n}x^n \to \infty$ であるから，この展開は発散する.
真数条件と合わせて，$-1 < x \leqq 1$ が領域となる.

☆別解　$\dfrac{d}{dx}\log(1+x) = \dfrac{1}{1+x}$ を用いて，1(1) で $x$ の代わりに $-x$ を用いる.
$$\log(1+x) = \int \frac{dx}{1-(-x)} = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right)\,dx$$
あとは，$x = 0$ のとき，$\log(1+x) = 0$ だから，積分定数を 0 と考えて，答えを導く.

(3)　$f(x) = \cos x$

$$f'(x) = -\sin x\ ,\ f''(x) = -\cos x\ ,\ f'''(x) = \sin x\ ,\ f''''(x) = \cos x\ .$$
以下巡回する.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \cos 0 + \frac{-\sin 0}{1!}x + \frac{-\cos 0}{2!}x^2 + \frac{\sin 0}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \boldsymbol{f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots} \\ &= \boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}} \end{aligned}$$

☆実数全体で収束する. 理由は 1(2) と同様.