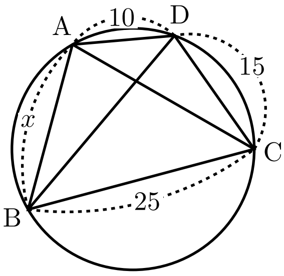
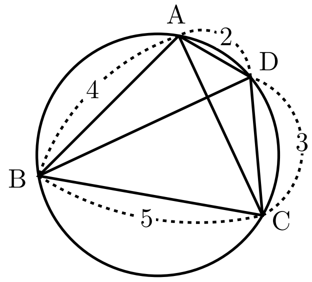
反射テスト　線分の長さ　トレミーの定理　01

1.　x の長さを求めよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

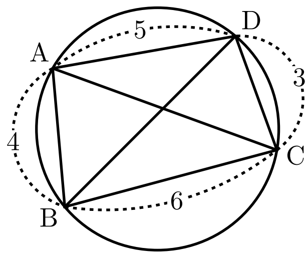
(1)　$\mathrm{AC}=22$, $\mathrm{BD}=25$



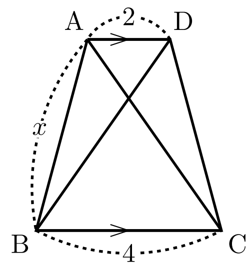
(2)　$\mathrm{AC}=4$, $\mathrm{BD}=x$



(3)　$\mathrm{AC}=x$, $\mathrm{BD}=x+1$

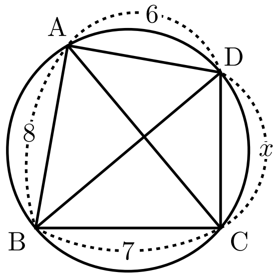


(4)　$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=6$

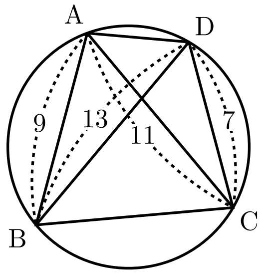


2. 次の問に答えよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

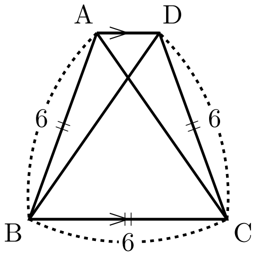
(1) $AC=9$, $BD=10$
x の長さを求めよ.



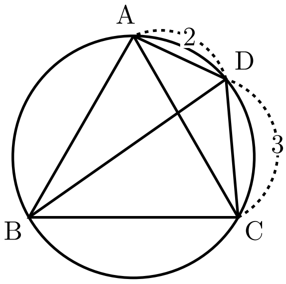
(2) $AD:BC=1:2$ であるとき,
AD の長さを求めよ.



(3) $AB=BC=CD=6$, $AD=x$, $AC=x+5$
x の長さを求めよ.

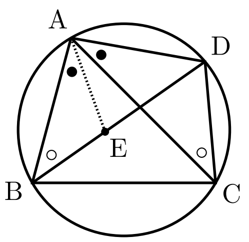


(4) $\triangle ABC$ が正三角形であるとき,
BD の長さを求めよ.



反射テスト　線分の長さ　トレミーの定理　01　解答解説

1.　x の長さを求めよ.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分, B 級 4 分, C 級 6 分 ）



★トレミーの定理　AB・CD + AD・BC = AC・BD

　∠BAE = ∠CAD となるように BD 上に点 E をおく.

△ABE ∽ △ACD　⇒　AB : BE = AC : CD　⇒　AB・CD = BE・AC

△ABC ∽ △AED　⇒　BC : CA = ED : DA　⇒　BC・DA = CA・ED

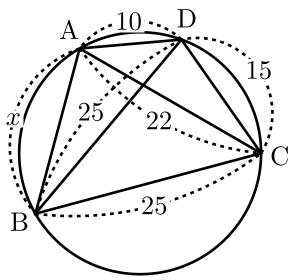
∴　2 つの式の和から　AB・CD + AD・BC = (BE + ED)・AC = AC・BD

☆覚え方　円の内接四角形において「 対辺の積の和 = 対角線の積 」

☆トレミーとは古代ギリシアの天文学者クラウディオス・プトレマイオスのこと.

そのため, この定理はプトレマイオスの定理とも呼ばれる.

(1)　AC = 22 , BD = 25



★トレミーの定理

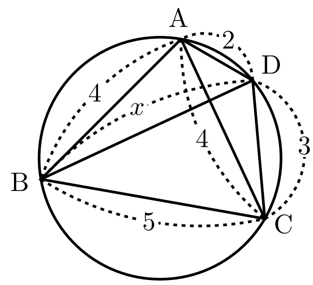
AB・CD + AD・BC = AC・BD

$x \cdot 15 + 10 \cdot 25 \ = \ 22 \cdot 25$

⇔　$15x + 250 = 550$

⇔　$\boldsymbol{x = 20}$

(2)　AC = 4 , BD = x



★トレミーの定理

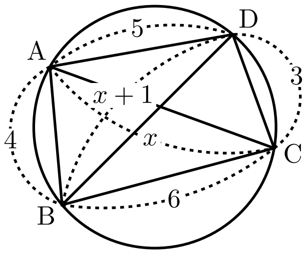
AB・CD + AD・BC = AC・BD

$4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \ = \ 4 \cdot x$

⇔　$12 + 10 = 4x$

⇔　$\boldsymbol{x = \dfrac{11}{2}}$

(3)　AC = x , BD = $x + 1$



★トレミーの定理

AB・CD + AD・BC = AC・BD

$4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \ = \ x \cdot (x + 1)$

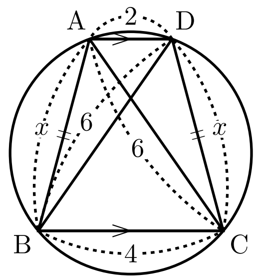
⇔　$12 + 30 = x^2 + x$

⇔　$x^2 + x - 42 = 0$

⇔　$(x + 7)(x - 6) = 0$

$x > 0$ より,　$\boldsymbol{x = 6}$

(4)　AC = BD = 6



条件から, 四角形は等脚台形

よって, 円に内接する.

★トレミーの定理

AB・CD + AD・BC = AC・BD

$x \cdot x + 2 \cdot 4 \ = \ 6 \cdot 6$

⇔　$x^2 + 8 = 36$

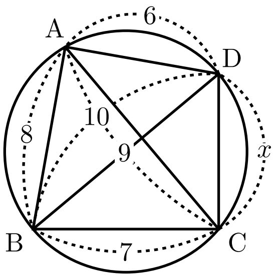
⇔　$x = \pm 2\sqrt{7}$

$x > 0$ より,　$x = \boldsymbol{2\sqrt{7}}$

☆三平方の定理のみでも解ける.

2.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\mathrm{AC}=9$, $\mathrm{BD}=10$
x の長さを求めよ.



★トレミーの定理

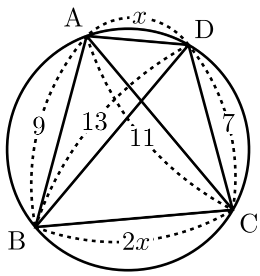
$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$

$8\cdot x+6\cdot 7 \;=\; 9\cdot 10$

$\Leftrightarrow\quad 8x+42=90$

$\Leftrightarrow\quad x=\boldsymbol{6}$

(2)　$\mathrm{AD}:\mathrm{BC}=1:2$ であるとき,
AD の長さを求めよ.



$\mathrm{AD}=x$ とおくと, $\mathrm{BC}=2x$

★トレミーの定理

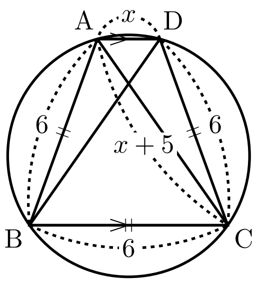
$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$

$9\cdot 7+x\cdot 2x \;=\; 11\cdot 13$

$\Leftrightarrow\quad 2x^2+63=143 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm 2\sqrt{10}$

$x>0$ より, $x=\boldsymbol{2\sqrt{10}}$

(3)　$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=6$, 　$\mathrm{AD}=x$, $\mathrm{AC}=x+5$
x の長さを求めよ.



条件から, 四角形は等脚台形
よって, 円に内接する.

★トレミーの定理

$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$

$6\cdot 6+x\cdot 6 \;=\; (x+5)\cdot(x+5)$

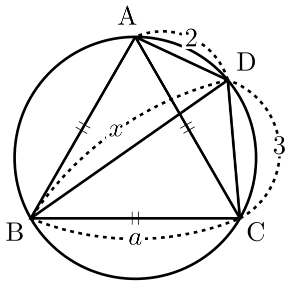
$\Leftrightarrow\quad 36+6x=x^2+10x+25$

$\Leftrightarrow\quad x^2+4x-11=0$

$\Leftrightarrow\quad x=-2\pm\sqrt{15}$

$x>0$ より $x=\boldsymbol{-2+\sqrt{15}}$

(4)　△ABC が正三角形であるとき,
BD の長さを求めよ.



正三角形の一辺の長さを a とする.

★トレミーの定理

$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$

$a\cdot 3+2\cdot a \;=\; a\cdot x \quad\Leftrightarrow\quad 5a=ax$

$a\neq 0$ より, $\boldsymbol{x=5}$

☆別解 1

△ACD に余弦定理を適用して,

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{DA}^2+\mathrm{CD}^2-2\cdot\mathrm{DA}\cdot\mathrm{CD}\cdot\cos 120^\circ$

$\mathrm{AC}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\mathrm{AC}>0$ より, $\mathrm{AC}=\sqrt{19}$

△ABD に余弦定理を適用して,

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BD}^2+\mathrm{DA}^2-2\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DA}\cdot\cos 60^\circ$

$\sqrt{19}^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$

$x>0$ より, $x=5$

☆別解 2　△BCD を B を中心に回転移動させる.
ちょうど C が D の位置にくるようにして, △BDA の左側にもっていく. D の移動先を D′とすれば, △BDD′が正三角形になるので, $x=2+3=5$.