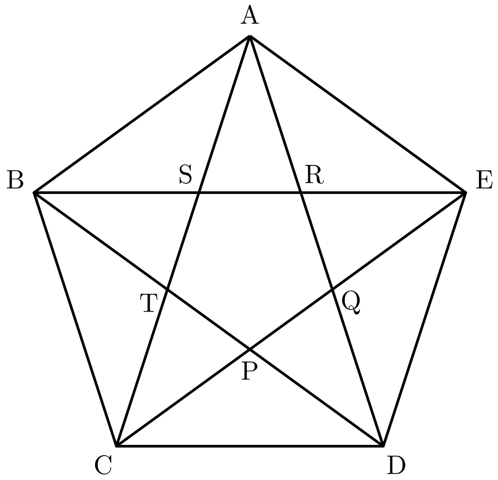
反射テスト　線分の長さ　正五角形　黄金比　01

1.　下図は一辺の長さが 1 の正五角形である．　（ S 級 6 分，A 級 10 分，B 級 15 分，C 級 20 分 ）

(1)　$\triangle \mathrm{ACD} \backsim \triangle \mathrm{CSB}$ を証明せよ．

(2)　(1) を用いて，対角線 AC の長さを求めよ．求め方も示せ．

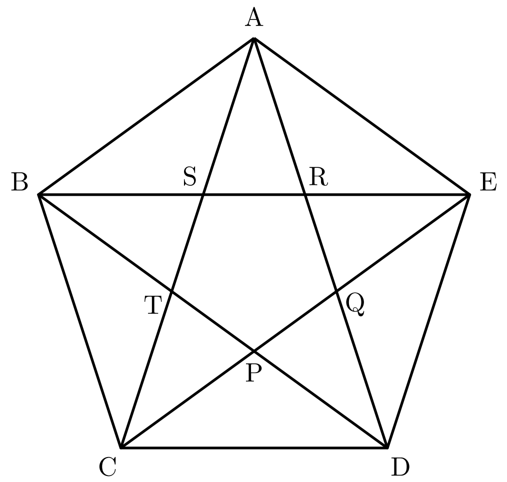


2. 下図は一辺の長さが 1 の正五角形である. （ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 15 分, C 級 20 分 ）

(1) △ABE ∽ △SAB を証明せよ.

(2) (1) を用いて, 対角線 BE の長さを求めよ.求め方も示せ.

(3) 次の $\boxed{}$ に入る数を求めよ. BS : SR = $\boxed{}$: 1.

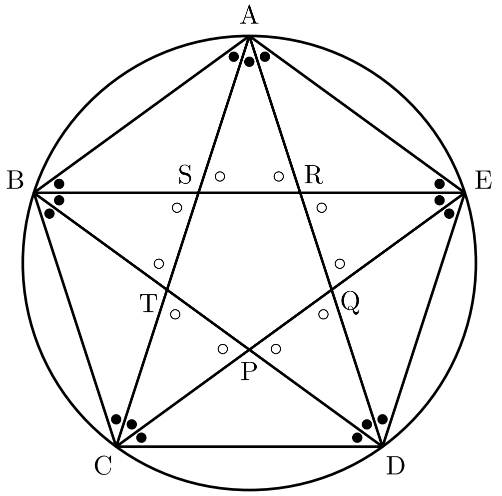


反射テスト　線分の長さ　正五角形　黄金比　01　解答解説

1.　下図は一辺の長さが 1 の正五角形である.　（ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 15 分, C 級 20 分 ）

(1)　$\triangle\mathrm{ACD} \backsim \triangle\mathrm{CSB}$ を証明せよ.

(2)　(1) を用いて, 対角線 AC の長さを求めよ.求め方も示せ.



(1)　左図の ABCDE が正五角形.
正五角形の 1 つの外角は　$360^\circ \div 5 = 72^\circ$.
よって, 1 つの内角は　$180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

正五角形の外接円を考える. 正多角形の対称性から $\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}} = \overset{\frown}{\mathrm{DE}}$.
円周角の定理から, $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{DAE} = 108^\circ \div 3 = 36^\circ$.
対称性から全ての細い鋭角が 36° になる. 左図に「●」で表す.
底辺と底角が等しいから二角夾辺相等より,
$\triangle\mathrm{PCD}, \triangle\mathrm{QDE}, \triangle\mathrm{REA}, \triangle\mathrm{SAB}, \triangle\mathrm{TBC}$ は合同な二等辺三角形.
二等辺三角形の頂角の外角は全て $36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$.
これら太い鋭角を左図に「○」で表す.

$\triangle\mathrm{ACD}$ と $\triangle\mathrm{CSB}$ において,

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{CAD} &= \angle\mathrm{SCB} = 36^\circ \\ \angle\mathrm{ACD} &= \angle\mathrm{CSB} = 72^\circ \end{aligned}$$

二角相等であるから, $\triangle\mathrm{ACD} \backsim \triangle\mathrm{CSB}$.

(2)　**★ 求めたいものを文字でおく**

AC の長さを x とおくと, 正五角形の対角線の長さは全て x .

$\triangle\mathrm{CSB}$ は二等辺三角形だから, $\mathrm{CS} = \mathrm{BC} = 1$.
$\triangle\mathrm{EAS}$ は二等辺三角形だから, $\mathrm{ES} = \mathrm{EA} = 1$.
対角線 $\mathrm{EB} = x$ だから, $\mathrm{SB} = \mathrm{EB} - \mathrm{ES} = x - 1$.

以上から, $\triangle\mathrm{ACD} \backsim \triangle\mathrm{CSB}$ より,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{AC} & : & \mathrm{CD} & = & \mathrm{CS} & : & \mathrm{SB} \\ x & : & 1 & = & 1 & : & (x-1) \end{array}$$

$\Leftrightarrow \quad x(x-1) = 1 \times 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x > 0$ より,　$x = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

★ 正五角形の一辺の長さと対角線の長さの比は黄金比　$\boldsymbol{1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ($\fallingdotseq 5 : 8$)

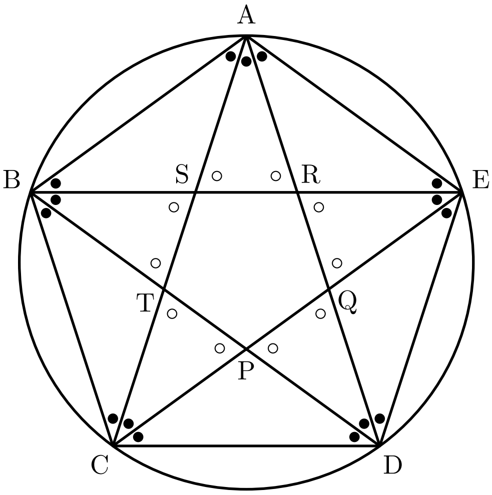
$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots$ を **黄金数** と言い, ギリシア文字の「ϕ」で表し, 別名「外中比」,「中末比」とも呼ばれる.
昔から美しい比として知られ, 美術・建築・デザイン・自然科学などいろいろな分野で見られる比である.

2. 下図は一辺の長さが 1 の正五角形である. （S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 15 分, C 級 20 分）

(1) $\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{SAB}$ を証明せよ.

(2) (1) を用いて, 対角線 BE の長さを求めよ.求め方も示せ.

(3) 次の $\boxed{}$ に入る数を求めよ. $\mathrm{BS} : \mathrm{SR} = \boxed{} : 1$.



(1) 左図の ABCDE が正五角形.
正五角形の 1 つの外角は $360° \div 5 = 72°$.
よって, 1 つの内角は $180° - 72° = 108°$.
正五角形の外接円を考える. 正多角形の対称性から $\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}} = \overset{\frown}{\mathrm{DE}}$.
円周角の定理から, $\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAD} = \angle\mathrm{DAE} = 108° \div 3 = 36°$.
対称性から全ての細い鋭角が 36°になる. 左図に「●」で表す.
$\triangle\mathrm{PCD}, \triangle\mathrm{QDE}, \triangle\mathrm{REA}, \triangle\mathrm{SAB}, \triangle\mathrm{TBC}$ が
全て合同な二等辺三角形になるので,
二等辺三角形の頂角の外角は全て $36° + 36° = 72°$.
これら「72°」を左図に「○」で表す.

$\triangle\mathrm{ABE}$ と $\triangle\mathrm{SAB}$ において,

$$\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{SAB} = 36°$$
$$\angle\mathrm{BEA} = \angle\mathrm{ABS} = 36°$$

二角相等であるから, $\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{SAB}$.

(2) **★ 求めたいものを文字でおく**

BE の長さを x とおくと, 正五角形の対角線の長さは全て x .
$\triangle\mathrm{EAS}$ は二等辺三角形だから, $\mathrm{ES} = \mathrm{EA} = 1$.
対角線 $\mathrm{BE} = x$ だから, $\mathrm{BS} = \mathrm{BE} - \mathrm{ES} = x - 1$.
以上から, $\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{SAB}$ より,

$$\mathrm{BE} : \mathrm{EA} = \mathrm{AB} : \mathrm{BS}$$
$$x1 : 1 = 1 : (x-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad x(x-1) = 1 \times 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

よって, $x > 0$ より, $x = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(3) (2) から,

$$\mathrm{BS} = \mathrm{BE} - \mathrm{SE} = x - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

上図は軸 AP で線対称だから, $\mathrm{BS} = \mathrm{ER} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\mathrm{SR} = \mathrm{SE} - \mathrm{ER} = 1 - \frac{-1+\sqrt{2}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

以上から

$$\begin{aligned} \mathrm{BS} : \mathrm{SR} &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} : \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\sqrt{5}-1\right) : \left(3-\sqrt{5}\right) \\ &= \left(\sqrt{5}-1\right)\left(3+\sqrt{5}\right) : \left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right) \\ &= \left(2+2\sqrt{5}\right) : 4 = \left(\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) : 1 \end{aligned}$$

(3) 別解 $\mathrm{BS} : \mathrm{SR} = \mathrm{AS} : \mathrm{SR} = \mathrm{AC} : \mathrm{CD} = x : 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{} = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$