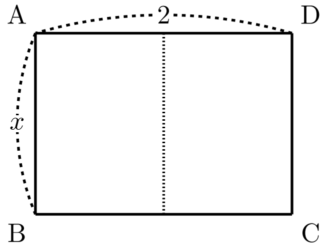
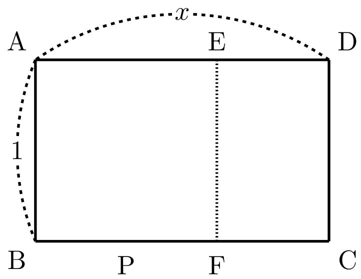
反射テスト　線分比　特別な四角形の辺の比　01

1.　長方形 ABCD がある．x を求めよ．（ S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）

（1）　$\mathrm{AB} = x$, $\mathrm{BC} = 2$. 図のように半分しても, 縦横比が元の長方形と同じである．



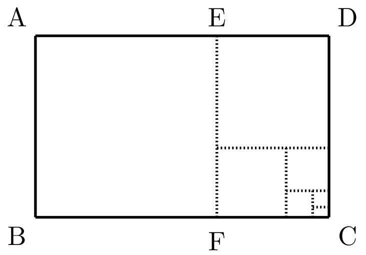
（2）　$\mathrm{AD} = x$, $\mathrm{AB} = 1$. 下図で四角形 ABFE は正方形で, 四角形 DEFC が元の長方形と相似.



2. x を求めよ.（ S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）

(1) 長方形 ABCD と長方形 EFGH は相似で, 長方形 EFGH の面積は長方形 ABCD の面積の 2 倍であり, 長方形 ABCD の長い辺の長さと長方形 EFGH の短い辺の長さが等しい. 長方形 ABCD の縦と横の長さの比を求めよ.

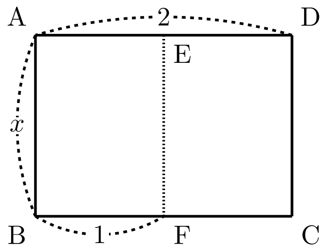
(2) 横の長さが縦の長さより長く, 縦の長さの 2 倍より短い長方形 ABCD がある. 下図のように, 長方形 ABCD の内部に正方形 ABFE を 1 つ作り, 長方形 ABCD から除くと長方形 EFCD が 1 つできる. 次に長方形 EFCD から同じように正方形を 1 つ除くとまた長方形が 1 つできる. この作業を下の図のように永遠に繰り返せる場合, 元の長方形 ABCD の縦と横の長さの比を求めよ.



反射テスト　線分比　特別な四角形の辺の比　01　解答解説

1.　長方形 ABCD がある．x を求めよ．(S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分)

(1)　AB $= x$, BC $= 2$. 図のように半分しても, 縦横比が元の長方形と同じである．



★ 四角形の相似

四角形 ABCD ∽ 四角形 EABF であるから,

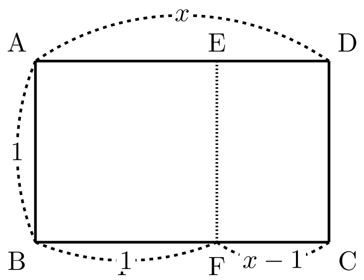
$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{AB}:\mathrm{BC} & = & \mathrm{EA}:\mathrm{AB} \\ \Leftrightarrow & x:2 & = & 1:x \\ \Leftrightarrow & x^2 & = & 2 \end{array}$$

$x > 0$ より, $\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$.

★ 白銀比と白銀方形

上の長方形のように, 縦横比が $\mathbf{1 : \sqrt{2}}$ の長方形を **白銀方形** という．また, $\mathbf{1 : \sqrt{2}}$ の比を **白銀比** (*silver ratio*) と呼ぶ．日本の紙の規格である A 判はこの白銀方形で, 半分に折っても縦横比は変わらない特徴がある．この比は, 大和比 (やまとひ) とも呼ばれ, 代表的な日本建築である, 法隆寺の金堂・五重塔の柱間隔・軒の出のバランスに用いられている．

(2)　AD $= x$, AB $= 1$. 下図で四角形 ABFE は正方形で, 四角形 DEFC が元の長方形と相似.



★ 四角形の相似

四角形 ABCD ∽ 四角形 DEFC であるから,

$$\begin{array}{rccc} & \mathrm{AB}:\mathrm{BC} & = & \mathrm{DE}:\mathrm{EF} \\ \Leftrightarrow & 1:x & = & (x-1):1 \\ \Leftrightarrow & x(x-1) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & x^2-x-1 & = & 0 \end{array}$$

$x > 0$ より, $\boldsymbol{x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

★ 黄金比と黄金方形

上の長方形のように, 縦横比が $\mathbf{1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ の長方形を **黄金方形** という．また, $\mathbf{1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ の比を **黄金比** (*golden ratio*) , $\mathbf{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ を **黄金数** と呼ぶ．フィボナッチ数列の隣接 2 項の比は黄金比に収束し, また, 正五角形の辺と対角線も黄金比である．昔から世界中で最も美しいと言われる比率で, 様々な分野で見られる．

自然：ひまわりの種の配列, オウムガイの殻.

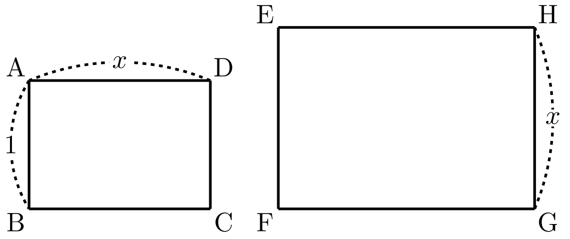
建築：古代ギリシャのパルテノン神殿.

芸術：ミロのヴィーナス, ルネッサンスのレオナルド・ダ・ヴィンチの作品 (モナ・リザなど) .

美容, デザイン：現代のメイクアップ技術, クレジットカードや名刺の縦横比.

2. x を求めよ.（ S 級 1 分 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）

(1) 長方形 ABCD と長方形 EFGH は相似で, 長方形 EFGH の面積は長方形 ABCD の面積の 2 倍であり, 長方形 ABCD の長い辺の長さと長方形 EFGH の短い辺の長さが等しい. 長方形 ABCD の縦と横の長さの比を求めよ.



★ 四角形の相似

左図のように 2 つの長方形を横長とし,
長方形 ABCD の縦と横の長さの比を $1 : x$ とおく.
長方形 EFGH の縦と横の長さの比も $1 : x$ であるから,
横の長さは $x \times \dfrac{x}{1} = x^2$ である.

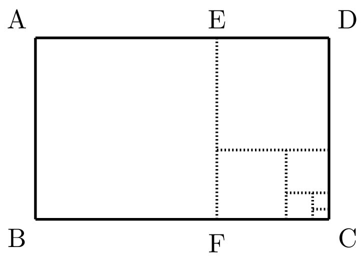
長方形 ABCD $= 1 \times x = x$.
長方形 EFGH $= x \times x^2 = x^3$.

面積が 2 倍であるから, $\dfrac{x^3}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$

$x > 0$ より, $x = \sqrt{2}$ となるから, 長方形 ABCD の縦と横の長さの比は, $\mathbf{1 : \sqrt{2}}$.

別解
面積比が $1 : 2$ であるから, 相似比は $1 : \sqrt{2}$ である.
長方形 ABCD $\backsim$ 長方形 EFGH として, $\mathrm{AB} : \mathrm{EF} = 1 : \sqrt{2}$.
題意から, $\mathrm{BC} = \mathrm{EF}$ なので, $\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathbf{1 : \sqrt{2}}$

(2) 横の長さが縦の長さより長く, 縦の長さの 2 倍より短い長方形 ABCD がある. 下図のように, 長方形 ABCD の内部に正方形 ABFE を 1 つ作り, 長方形 ABCD から除くと長方形 EFCD が 1 つできる. 次に長方形 EFCD から同じように正方形を 1 つ除くとまた長方形が 1 つできる. この作業を下の図のように永遠に繰り返せる場合, 元の長方形 ABCD の縦と横の長さの比を求めよ.



永遠に続けられるならば, 四角形 ABCD $\backsim$ 四角形 DEFC である.

★ 四角形の相似

長方形 ABCD の縦と横の長さの比を $1 : x$ とおくと,

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \mathrm{AB} : \mathrm{BC} & = & \mathrm{DE} : \mathrm{EF} \\
\Leftrightarrow & 1 : x & = & (x-1) : 1 \\
\Leftrightarrow & x(x-1) & = & 1 \\
\Leftrightarrow & x^2 - x - 1 & = & 0
\end{array}
$$

$x > 0$ より, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

よって, 縦と横の長さの比は, $\mathbf{1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.