反射テスト　三角形　内接円・外接円の半径　01

1.　次の △ABC の内接円と外接円の半径を求めよ. ただし a, b, c は三辺の長さを表す.

（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$a = 9$, $b = 12$, $c = 15$

(2)　$a = 14$, $b = 15$, $c = 13$

2. 次の △ABC の内接円と外接円の半径を求めよ．ただし a, b, c は三辺の長さを表す．

（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分 ）

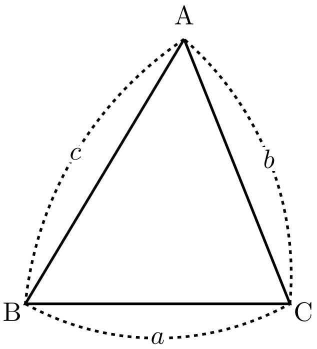
(1) $a = 10$, $b = 24$, $c = 26$

(2) $a = 12$, $b = 14$, $c = 16$

反射テスト　三角形　内接円・外接円の半径　01　解答解説

1.　次の △ABC の内接円と外接円の半径を求めよ．ただし a, b, c は三辺の長さを表す．

（ S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）



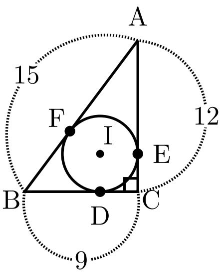
a, b, c は三辺の長さ，S は △ABC の面積とすれば，

$$\begin{cases} \textbf{★内接円の半径}\quad \boldsymbol{r = \dfrac{2S}{a+b+c}} & \text{（ツーショットあべちゃん）} \\ \textbf{★外接円の半径}\quad \boldsymbol{R = \dfrac{abc}{4S}} & \text{（あべちゃんフォーカス）} \end{cases}$$

直角三角形の場合，c を斜辺とすれば，

$$\begin{cases} \textbf{★直角三角形の内接円の半径}\quad \boldsymbol{r = \dfrac{a+b-c}{2}} & \text{（接線と接点から導ける）} \\ \textbf{★直角三角形の外接円の半径}\quad \boldsymbol{R = \dfrac{c}{2}} & \text{（斜辺の半分）} \end{cases}$$

(1)　$a = 9$，$b = 12$，$c = 15$



$a : b : c = 3 : 4 : 5$ であるから直角三角形である．

★直角三角形の内接円の半径　$r = \dfrac{a+b-c}{2}$

$r = \dfrac{9+12-15}{2} = \mathbf{3}$　**…答え**

★直角三角形の外接円の半径　$R = \dfrac{c}{2}$

$R = \boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$　**…答え**

☆別解 1　★ピタゴラス数の 3 辺比と内接円の半径の関係　$3 : 4 : 5 : 1$

これを知っていれば　$r = 9 \times \dfrac{1}{3} = 3$

☆別解 2　(2) のように面積を用いて求める方法もある．

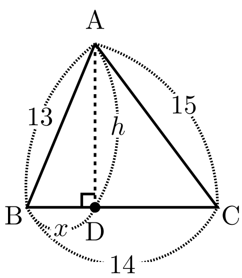
☆公式を知らなければ，上のように図を描いて調べよう．

IDCE が正方形になり，その一辺が内接円の半径に等しいので，$\mathrm{BD} = 9 - r$，$\mathrm{AE} = 12 - r$

$\mathrm{AB} = \mathrm{AF} + \mathrm{FB} = \mathrm{AE} + \mathrm{BC}$ となることを用いれば r を求めることができる．

直角三角形の内接円の半径の公式は同様にして証明できる．

(2)　$a = 14$，$b = 15$，$c = 13$



★内接円の半径 $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$　★外接円の半径 $R = \dfrac{abc}{4S}$

を用いたいので，まず面積を求める．（ S は △ABC の面積 ）

点 A から辺 BC に垂線を下ろし，その足を D とする．$\mathrm{BD} = x$，$\mathrm{AD} = h$ とする．

$$\begin{cases} \text{△ABD に三平方の定理を用いて} & x^2 + h^2 = 13^2 \\ \text{△ACD に三平方の定理を用いて} & (14 - x)^2 + h^2 = 15^2 \end{cases}$$

この連立方程式を解けば，$x = 5$，$h = 12$　⇒　$S = \dfrac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$

よって
$$\begin{cases} r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \times 84}{14+15+13} = \mathbf{4} & \textbf{…答え} \\ R = \frac{abc}{4S} = \frac{14 \times 15 \times 13}{4 \times 84} = \boldsymbol{\dfrac{65}{8}} & \textbf{…答え} \end{cases}$$

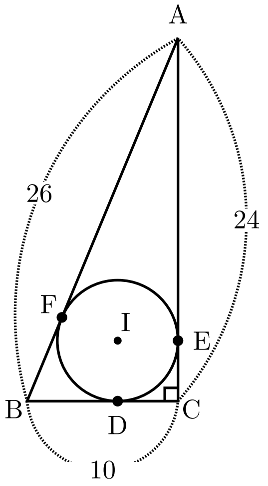
☆三辺がわかっているときの三角形の面積

「★垂線を引いて垂線を求める」か「★ヘロンの公式」などの方法があり，反射テストもある．HP 参照．

2. 　次の △ABC の内接円と外接円の半径を求めよ．ただし a, b, c は三辺の長さを表す．

（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分 ）

(1) 　$a = 10$ ，$b = 24$ ，$c = 26$



$a : b : c = 5 : 12 : 13$ であるから直角三角形である．

★直角三角形の内接円の半径　$r = \dfrac{a+b-c}{2}$

$r = \dfrac{10+24-26}{2} = \mathbf{4}$ 　**…答え**

★直角三角形の外接円の半径　$R = \dfrac{c}{2}$

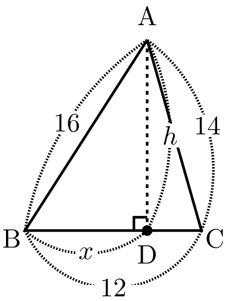
$R = \dfrac{26}{2} = \mathbf{13}$ 　**…答え**

☆別解（★ピタゴラス数の 3 辺比と内接円の半径の関係　5 : 12 : 13 : 2 ）
これを知っていれば　$r = 10 \times \dfrac{2}{5} = 4$

★主なピタゴラス数の 3 辺比と内接円の半径の関係

3 : 4 : 5 : 1 　 5 : 12 : 13 : 2 　 7 : 24 : 25 : 3 　 8 : 15 : 17 : 3

(2) 　$a = 12$ ，$b = 14$ ，$c = 16$



★内接円の半径 $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$ 　　★外接円の半径 $R = \dfrac{abc}{4S}$
を用いたいので，まず面積を求める．（ S は △ABC の面積 ）

点 A から辺 BC に垂線を下ろし，その足を D とする．BD $= x$ ，AD $= h$ とする．

$$\begin{cases} \triangle\mathrm{ABD} \text{ に三平方の定理を用いて} \quad x^2 + h^2 = 16^2 \\ \triangle\mathrm{ACD} \text{ に三平方の定理を用いて} \quad (12-x)^2 + h^2 = 14^2 \end{cases}$$

この連立方程式を解けば，$x = \dfrac{17}{2}$ ，$h = \dfrac{7\sqrt{15}}{2}$ 　$\Rightarrow$ 　$S = \dfrac{1}{2} \times 12 \times \dfrac{7\sqrt{15}}{2} = 21\sqrt{15}$

よって
$$\begin{cases} r = \dfrac{2S}{a+b+c} = \dfrac{2 \times 21\sqrt{15}}{12+14+16} = \boldsymbol{\sqrt{15}} \quad \text{…答え} \\[2ex] R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{12 \times 14 \times 16}{4 \times 21\sqrt{15}} = \boldsymbol{\dfrac{32\sqrt{15}}{15}} \quad \text{…答え} \end{cases}$$

☆実は点 B から辺 CA に垂線を引いて高さを求める方が計算が楽である．
　垂線の足を E とすれば，CE $= 3$ ，BE $= 3\sqrt{15}$.
一般に三角形の面積を上記のように求めるとき，他の 2 辺の平均の長さの辺があるなら，
それを底辺とするとよい．計算が楽になる．(★真ん中は真ん中へ)