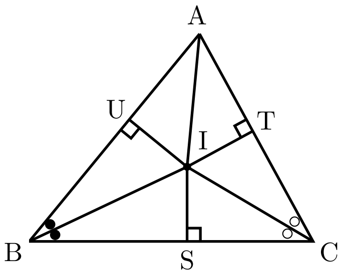
反射テスト　証明問題　三角形　五心とその関係　02

1. □ をうめよ．(S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分)



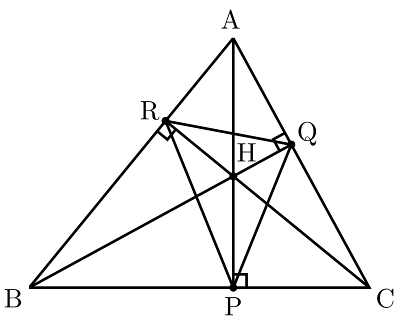
★三角形の内心
三角形の内心は，その三角形の 3 つの角の二等分線の交点である．
また，3 つの角の二等分線は必ず **1** 点で交わる．

証明
△ABC の∠B の二等分線と∠C の二等分線の交点を I とする．
点 I から辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ S, T, U とする．(左図)

△IBU と △IBS は，斜辺 IB が共通で，もう 1 つの鋭角も等しい（∠IBU = ∠IBS）．
直角三角形の □ 条件を満たすので，これらは □．　⇒　IU = IS
△ICS と △ICT は，斜辺 IC が共通で，もう 1 つの鋭角が等しい（∠ICS = ∠□）．
直角三角形の □ 条件を満たすので，これらは □．　⇒　IS = □
∴　IS = IT = IU　　⇒　　点 I を中心に半径 IS の円を描けば △ABC に内接するから，点 I は □ である．

このとき，△AIT と △AIU は，斜辺 IA が共通で，もう 1 つの辺が等しい（IT = IU）直角三角形であるから □．
⇒　∠IAT = ∠IAU　⇒　AI は∠A の二等分線であるから，△ABC の 3 つの角の二等分線は必ず **1** 点で交わる．

2. □ をうめよ．(S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分)



定義
三角形の各頂点から対辺へ垂線を引く．このときの 3 つの垂線は 1 点で交わる．
その点をその三角形の □ という．

★ △ABC の □ は △PQR の □ である．
証明
△ABC の各頂点から垂線を引き，垂線の足を左図のように P, Q, R とする．
3 つの垂線の交点 H は △ABC の □ である．

次に △PQR について考える．

△ABQ と △ACR において，$\begin{cases} \angle \mathrm{BAQ} = \angle \square & (\text{共通}) \\ \angle \mathrm{BQA} = \angle \square & (\text{仮定}) \end{cases}$

⇒　二角相等から，△ABQ ∽ △ACR　⇒　∠ABQ = ∠□　…①

四角形 RBPH において，∠BRH = ∠HPB = 90°だから，四角形の対角の和が 180°になる．
よって，四角形 RBPH は □ に □ する．　⇒　$\overset{\frown}{\mathrm{HR}}$の円周角は等しいから，　∠RBH = ∠R□H　…②
四角形 QCPH においても同様に考えれば，　∠QCH = ∠Q□H　…③

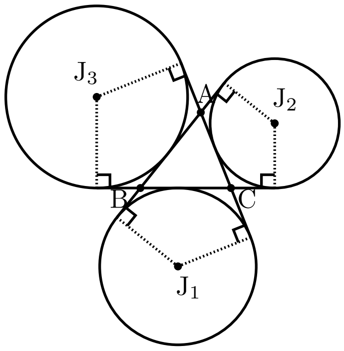
①〜③より，　∠RPH = ∠QPH　⇒　PH は∠RPQ の □ 線である．　…④

同様に考えれば，$\begin{cases} \text{QH は　} \angle \mathrm{P}\square \text{ の } \square \text{ 線である．} & \cdots ⑤ \\ \text{RH は　} \angle \mathrm{Q}\square \text{ の } \square \text{ 線である．} & \cdots ⑥ \end{cases}$

④〜⑥より，点 H は △PQR の □ である．

以上の結果から，△ABC の □ は △PQR の □ である．

3. $\boxed{\quad}$ をうめよ.(S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)



★ △ABC の傍接円

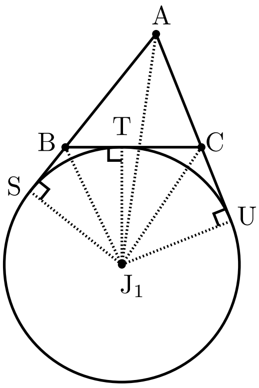
定義

三角形の三辺（延長線も含む）と接する円は内接円以外に,

左図のように円 J_1, J_2, J_3の 3 つがある.

これらを △ABC の傍接円という.

また, 傍接円の中心 J_1, J_2, J_3は △ABC の傍心という.



★傍心は三角形の外角の二等分線の交点　…①

証明

傍接円 J_1について調べてみよう.

$\triangle J_1BS$ と $\triangle J_1BT$ において,

$J_1B \;=\; J_1B$　(共通)

$J_1S \;=\; \boxed{\quad}$　(円 J_1の半径)

$\boxed{\qquad\qquad}$ が等しい直角三角形であるから,

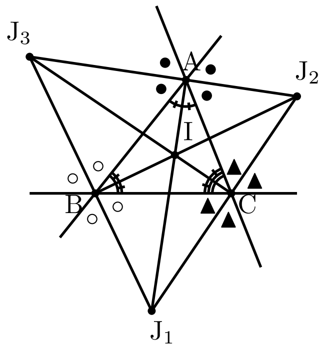
$\triangle J_1BS \equiv \triangle J_1BT \quad \Rightarrow \quad \angle J_1BS = \angle\boxed{\quad}$

同様に　$\angle J_1CT = \angle J_1CU$ であるので,

傍接円の中心 J_1は, △ABC の∠B と∠C の外角の二等分線の交点であることがわかる.

また同様にして, $\triangle AJ_1S \equiv \triangle AJ_1U$ が証明できるので, $\angle J_1AS = \angle J_1AU$ である.　…②

4. $\boxed{\quad}$ をうめよ.(S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)



★ △ABC の $\boxed{\quad}$ は $\triangle J_1J_2J_3$の $\boxed{\quad}$ である.

証明

△ABC の傍心を左図のように J_1, J_2, J_3とする.

(①と②から左図のよう等角記号が書ける.)

②から, AJ_1は∠CAB の $\boxed{\quad}$ 線である.

同様に考えれば, BJ_2, CJ_3もそれぞれ∠ABC, ∠BCA の $\boxed{\quad}$ 線である.

つまり点 I は △ABC の 3 つの角の $\boxed{\quad}$ 線の交点となり,

△ABC の $\boxed{\quad}$ であることがわかる.

$\triangle J_1J_2J_3$について考えよう.

①と②から,　$\angle J_1AB = \angle J_1AC$　かつ　$\angle BAJ_3 = \angle CAJ_2$

2 つ式の両辺の和から　$\angle J_1AB + \angle BAJ_3 = \angle J_1AC + \angle CAJ_2 \quad \Rightarrow \quad \angle J_1AJ_3 = \angle\boxed{\quad}$

$\angle J_1AJ_3 + \angle\boxed{\quad} = 180^\circ$であるから,　$\angle J_1AJ_3 = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$

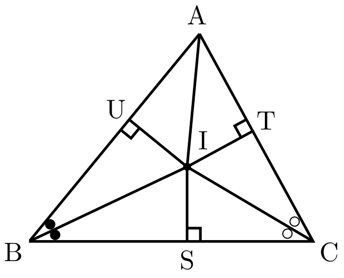
ゆえに　$AJ_1 \perp \boxed{\quad}$ である. 同様にして, $BJ_2 \perp \boxed{\quad}$ かつ $CJ_3 \perp \boxed{\quad}$

これらから, 点 I は $\triangle J_1J_2J_3$の $\boxed{\quad}$ である.

以上の結果から, △ABC の $\boxed{\quad}$ は $\triangle J_1J_2J_3$の $\boxed{\quad}$ である.

反射テスト　証明問題　三角形　五心とその関係　02　解答解説

1.　$\square$ をうめよ.（ S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）



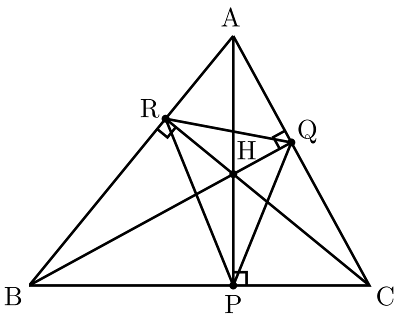
★三角形の内心
三角形の内心は，その三角形の 3 つの角の二等分線の交点である.
また，3 つの角の二等分線は必ず **1** 点で交わる.

証明
△ABC の∠B の二等分線と∠C の二等分線の交点を I とする.
点 I から辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ S, T, U とする.（左図）

△IBU と △IBS は，斜辺 IB が共通で，もう 1 つの鋭角も等しい（∠IBU = ∠IBS）.
直角三角形の $\boxed{\textbf{合同}}$ 条件を満たすので，これらは $\boxed{\textbf{合同}}$.　⇒　IU = IS
△ICS と △ICT は，斜辺 IC が共通で，もう 1 つの鋭角が等しい（∠ICS = ∠$\boxed{\textbf{ICT}}$）.
直角三角形の $\boxed{\textbf{合同}}$ 条件を満たすので，これらは $\boxed{\textbf{合同}}$.　⇒　IS = $\boxed{\textbf{IT}}$
　∴　IS = IT = IU　　⇒　　点 I を中心に半径 IS の円を描けば △ABC に内接するから，点 I は $\boxed{\textbf{内心}}$ である.

このとき，△AIT と △AIU は，斜辺 IA が共通で，もう 1 つの辺が等しい（IT = IU）直角三角形であるから $\boxed{\textbf{合同}}$.
⇒　∠IAT = ∠IAU　⇒　AI は∠A の二等分線であるから，△ABC の 3 つの角の二等分線は必ず **1** 点で交わる.

2.　$\square$ をうめよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



定義
三角形の各頂点から対辺へ垂線を引く. このときの 3 つの垂線は 1 点で交わる.
その点をその三角形の $\boxed{\textbf{垂心}}$ という.

★ △ABC の $\boxed{\textbf{垂心}}$ は △PQR の $\boxed{\textbf{内心}}$ である.
証明
△ABC の各頂点から垂線を引き，垂線の足を左図のように P, Q, R とする.
3 つの垂線の交点 H は △ABC の $\boxed{\textbf{垂心}}$ である.

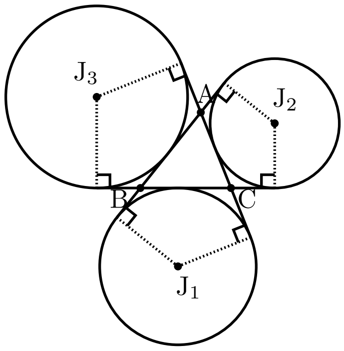
次に △PQR について考える.
△ABQ と △ACR において，$\begin{cases} \angle\text{BAQ} = \angle\boxed{\textbf{CAR}} & \text{(共通)} \\ \angle\text{BQA} = \angle\boxed{\textbf{CRA}} & \text{(仮定)} \end{cases}$
　⇒　二角相等から，△ABQ ∽ △ACR　⇒　∠ABQ = ∠$\boxed{\textbf{ACR}}$　…①

四角形 RBPH において，∠BRH = ∠HPB = 90°だから，四角形の対角の和が 180°になる.
よって，四角形 RBPH は $\boxed{\textbf{円}}$ に $\boxed{\textbf{内接}}$ する.　⇒　$\overset{\frown}{\text{HR}}$の円周角は等しいから，　∠RBH = ∠R$\boxed{\textbf{P}}$H　…②
四角形 QCPH においても同様に考えれば，　∠QCH = ∠Q$\boxed{\textbf{P}}$H　…③

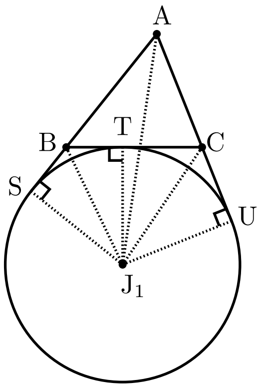
①〜③より，　∠RPH = ∠QPH　⇒　PH は∠RPQ の $\boxed{\textbf{二等分}}$ 線である.　…④
同様に考えれば，$\begin{cases} \text{QH は　∠P}\boxed{\textbf{QR}}\text{ の }\boxed{\textbf{二等分}}\text{ 線である.　…⑤} \\ \text{RH は　∠Q}\boxed{\textbf{RP}}\text{ の }\boxed{\textbf{二等分}}\text{ 線である.　…⑥} \end{cases}$
④〜⑥より，点 H は △PQR の $\boxed{\textbf{内心}}$ である.

以上の結果から，△ABC の $\boxed{\textbf{垂心}}$ は △PQR の $\boxed{\textbf{内心}}$ である.

3. $\boxed{}$ をうめよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



★ △ABC の傍接円
定義
三角形の三辺（延長線も含む）と接する円は内接円以外に,
左図のように円 J_1, J_2, J_3 の 3 つがある.
これらを △ABC の傍接円という.
また, 傍接円の中心 J_1, J_2, J_3 は △ABC の傍心という.



★傍心は三角形の外角の二等分線の交点 …①
証明
傍接円 J_1 について調べてみよう.
$\triangle J_1BS$ と $\triangle J_1BT$ において,

$$J_1B = J_1B \quad (\text{共通})$$
$$J_1S = \boxed{J_1T} \quad (\text{円 } J_1 \text{ の半径})$$

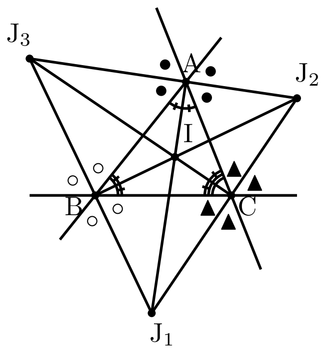
$\boxed{\textbf{斜辺ともう 1 つの辺}}$ が等しい直角三角形であるから,

$$\triangle J_1BS \equiv \triangle J_1BT \quad \Rightarrow \quad \angle J_1BS = \angle\boxed{J_1BT}$$

同様に $\angle J_1CT = \angle J_1CU$ であるので,
傍接円の中心 J_1 は, △ABC の∠B と∠C の外角の二等分線の交点であることがわかる.

また同様にして, $\triangle AJ_1S \equiv \triangle AJ_1U$ が証明できるので, $\angle J_1AS = \angle J_1AU$ である. …②

4. $\boxed{}$ をうめよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



★ △ABC の $\boxed{\textbf{内心}}$ は $\triangle J_1J_2J_3$ の $\boxed{\textbf{垂心}}$ である.
証明
△ABC の傍心を左図のように J_1, J_2, J_3 とする.
（①と②から左図のよう等角記号が書ける.）

②から, AJ_1 は∠CAB の $\boxed{\textbf{二等分}}$ 線である.
同様に考えれば, BJ_2, CJ_3 もそれぞれ∠ABC, ∠BCA の $\boxed{\textbf{二等分}}$ 線である.
つまり点 I は △ABC の 3 つの角の $\boxed{\textbf{二等分}}$ 線の交点となり,
△ABC の $\boxed{\textbf{内心}}$ であることがわかる.

$\triangle J_1J_2J_3$ について考えよう.
①と②から, $\angle J_1AB = \angle J_1AC$ かつ $\angle BAJ_3 = \angle CAJ_2$
2 つ式の両辺の和から $\angle J_1AB + \angle BAJ_3 = \angle J_1AC + \angle CAJ_2 \Rightarrow \angle J_1AJ_3 = \angle\boxed{J_1AJ_2}$
$\angle J_1AJ_3 + \angle\boxed{J_1AJ_2} = 180^\circ$ であるから, $\angle J_1AJ_3 = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$
ゆえに $AJ_1 \perp \boxed{J_2J_3}$ である. 同様にして, $BJ_2 \perp \boxed{J_3J_1}$ かつ $CJ_3 \perp \boxed{J_1J_2}$
これらから, 点 I は $\triangle J_1J_2J_3$ の $\boxed{\textbf{垂心}}$ である.

以上の結果から, △ABC の $\boxed{\textbf{内心}}$ は $\triangle J_1J_2J_3$ の $\boxed{\textbf{垂心}}$ である.