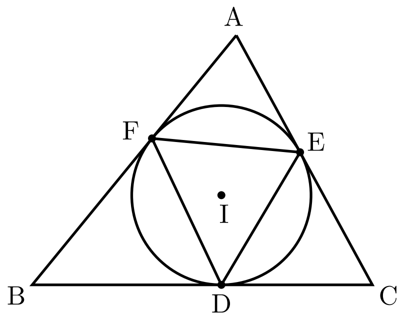
反射テスト　証明問題　三角形　五心とその関係　01

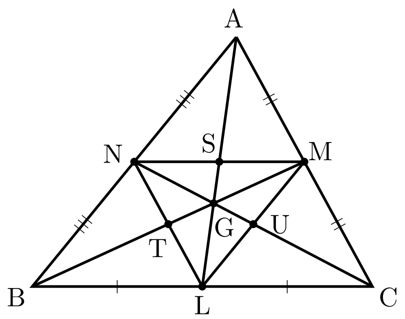
1. $\boxed{}$ をうめよ.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）



定義
三角形の全ての辺に接する円を内接円といい，その中心を内心という.
三角形の全ての頂点に接する円を外接円といい，その中心を外心という.

★ △ABC の $\boxed{}$ は △DEF の $\boxed{}$ である.
証明
左図のように，△ABC の内接円の中心を点 I とする.
ゆえに，点 I は △ABC の $\boxed{}$ である.
また，円 I は △DEF の $\boxed{}$ でもある.
よって，点 I は △DEF の $\boxed{}$ である.
以上の結果から，△ABC の $\boxed{}$ は △DEF の $\boxed{}$ である.

2. $\boxed{}$ をうめよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）



定義
△ABC の各辺の中点を L, M, N とする.
このとき，線分 AL, BM, CN は △ABC の $\boxed{}$ 線と呼ぶ.
これらは 1 つの点 G で交わり，これを △ABC の $\boxed{}$ という.
ちなみに重心は各線分を **2 : 1** に内分する.（ 左図の AG : GL = 2 : 1 ）

★ △ABC の $\boxed{}$ は △LMN の $\boxed{}$ である.
証明
定義から，左図の点 G は △ABC の $\boxed{}$ である.

次に △LMN について考える.
△ABC に中点連結定理を適用すれば，NM と BC は $\boxed{}$ だから,
　AS : SL = AN : NB = 1 : 1 である.

△ABL に中点連結定理を適用でき，　$\mathrm{NS} = \dfrac{1}{\boxed{}}\mathrm{BL} = \dfrac{1}{\boxed{}}\mathrm{BC}$

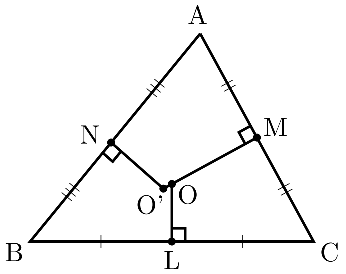
△ACL に中点連結定理を適用でき，　$\mathrm{SM} = \dfrac{1}{\boxed{}}\mathrm{CL} = \dfrac{1}{\boxed{}}\mathrm{BC}$

ゆえに，NS = SM となって，S は線分 NM の中点であることがわかる.

同様に，T, U はそれぞれ線分 NL, LM の中点であるから，点 G は △LMN の中線の交点となる.
ゆえに点 G は △LMN の $\boxed{}$ となる.

以上の結果から，△ABC の $\boxed{}$ は △LMN の $\boxed{}$ である.

3. $\boxed{\quad}$ をうめよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分 30 秒, C 級 7 分 30 秒 ）



★三角形の外心

三角形の外心は, その三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点である.
また, 3 つの垂直二等分線は必ず **1** 点で交わる.

証明

△ABC の辺 BC の垂直二等分線と辺 CA の垂直二等分線の交点を O とする.
点 O は辺 BC の垂直二等分線上にあるから, OB $=$ $\boxed{\quad}$
点 O は辺 CA の垂直二等分線上にあるから, OC $=$ $\boxed{\quad}$
　$\therefore$ 　OA $=$ OB $=$ OC

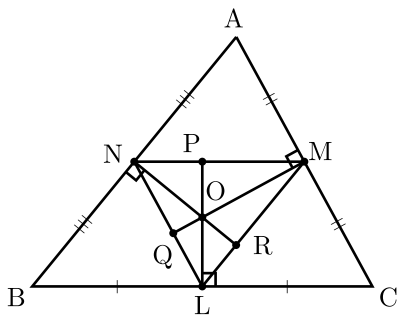
点 O は △ABC の各頂点から等距離にあり, O を中心にして外接円が描ける. 　$\Rightarrow$ 　点 O は $\boxed{\quad}$ である.

△ABC の辺 CA の垂直二等分線と辺 AB の垂直二等分線の交点を O' とする.
点 O′は辺 CA の垂直二等分線上にあるから, O′C $=$ O′A
点 O′は辺 AB の垂直二等分線上にあるから, O′A $=$ O′B

点 O と点 O′が異なる点であると仮定すれば（左上図）, 点 O, O′ともに辺 CA の垂直二等分線上にある異なる点である.
辺 BC の垂直二等分線と辺 CA の垂直二等分線の交点は 1 つしかないので,
点 O′が辺 BC の垂直二等分線 OL 上にないことになり, O′B $\neq$ O′C となり矛盾.
ゆえに, 点 O と点 O′が異なる点という仮定が $\boxed{\quad}$ 法により否定され, 点 O と点 O′は一致する.

以上から, 三角形の外心は各辺の垂直二等分線の交点であり, 必ず **1** 点で交わる.

4. $\boxed{\quad}$ をうめよ.（ S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）



★ △ABC の $\boxed{\quad}$ は △LMN の $\boxed{\quad}$ である.
証明
左図のように, △ABC の各辺の中点を L, M, N とすれば,
線分 OL, OM, ON は △ABC の各辺の垂直二等分線になるので,
点 O は △ABC の $\boxed{\quad}$ である.

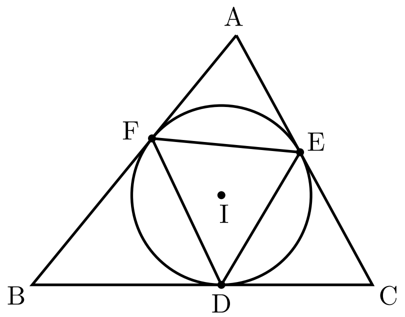
次に △LMN について考える.
△ABC に $\boxed{\quad\quad}$ 定理を適用すれば, NM と BC は $\boxed{\quad}$ だから,
　$\boxed{\quad}$ 角は等しく, 　∠NPL $=$ ∠CLP $= 90°$ 　$\Rightarrow$ 　LP $\perp$ $\boxed{\quad}$

同様にして, 　MQ $\perp$ $\boxed{\quad}$ 　かつ 　NR $\perp$ $\boxed{\quad}$
ゆえに, 点 O は △LMN の各頂点から対辺への垂線の交点であり, △LMN の $\boxed{\quad}$ である.

以上の結果から, △ABC の $\boxed{\quad}$ は △LMN の $\boxed{\quad}$ である.

反射テスト　証明問題　三角形　五心とその関係　01　解答解説

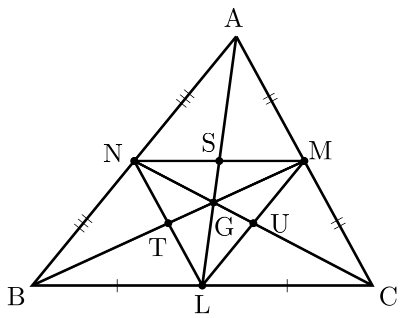
1. $\boxed{}$ をうめよ.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）



定義
三角形の全ての辺に接する円を内接円といい，その中心を内心という.
三角形の全ての頂点に接する円を外接円といい，その中心を外心という.

★ △ABC の $\boxed{\text{内心}}$ は △DEF の $\boxed{\text{外心}}$ である.
証明
左図のように，△ABC の内接円の中心を点 I とする.
ゆえに，点 I は △ABC の $\boxed{\text{内心}}$ である.
また，円 I は △DEF の $\boxed{\text{外接円}}$ でもある.
よって，点 I は △DEF の $\boxed{\text{外心}}$ である.
以上の結果から，△ABC の $\boxed{\text{内心}}$ は △DEF の $\boxed{\text{外心}}$ である.

2. $\boxed{}$ をうめよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）



定義
△ABC の各辺の中点を L, M, N とする.
このとき，線分 AL, BM, CN は △ABC の $\boxed{\text{中}}$ 線と呼ぶ.
これらは 1 つの点 G で交わり，これを △ABC の $\boxed{\text{重心}}$ という.
ちなみに重心は各線分を **2 : 1** に内分する.（ 左図の AG : GL = 2 : 1 ）

★ △ABC の $\boxed{\text{重心}}$ は △LMN の $\boxed{\text{重心}}$ である.
証明
定義から，左図の点 G は △ABC の $\boxed{\text{重心}}$ である.

次に △LMN について考える.
△ABC に中点連結定理を適用すれば，NM と BC は $\boxed{\text{平行}}$ だから，
　AS : SL = AN : NB = 1 : 1 である.

△ABL に中点連結定理を適用でき，　$\mathrm{NS} = \dfrac{1}{\boxed{2}}\mathrm{BL} = \dfrac{1}{\boxed{4}}\mathrm{BC}$

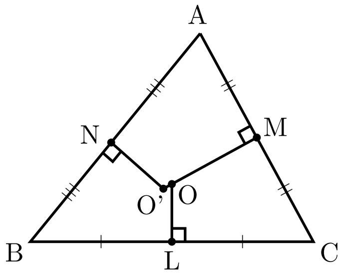
△ACL に中点連結定理を適用でき，　$\mathrm{SM} = \dfrac{1}{\boxed{2}}\mathrm{CL} = \dfrac{1}{\boxed{4}}\mathrm{BC}$

ゆえに， NS = SM となって，S は線分 NM の中点であることがわかる.

同様に，T, U はそれぞれ線分 NL, LM の中点であるから，点 G は △LMN の中線の交点となる.
ゆえに点 G は △LMN の $\boxed{\text{重心}}$ となる.

以上の結果から，△ABC の $\boxed{\text{重心}}$ は △LMN の $\boxed{\text{重心}}$ である.

3. $\boxed{}$ をうめよ.（ S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分 30 秒，C 級 7 分 30 秒 ）



★三角形の外心

三角形の外心は，その三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点である．
また，3 つの垂直二等分線は必ず **1** 点で交わる．

証明

△ABC の辺 BC の垂直二等分線と辺 CA の垂直二等分線の交点を O とする．
点 O は辺 BC の垂直二等分線上にあるから，OB = $\boxed{\textbf{OC}}$
点 O は辺 CA の垂直二等分線上にあるから，OC = $\boxed{\textbf{OA}}$
∴　OA = OB = OC

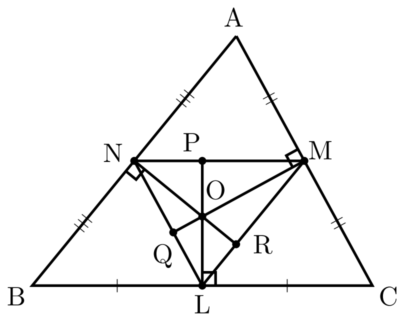
点 O は △ABC の各頂点から等距離にあり，O を中心にして外接円が描ける．　⇒　点 O は $\boxed{\textbf{外心}}$ である．

△ABC の辺 CA の垂直二等分線と辺 AB の垂直二等分線の交点を O′とする．
点 O′は辺 CA の垂直二等分線上にあるから，O′C = O′A
点 O′は辺 AB の垂直二等分線上にあるから，O′A = O′B

点 O と点 O′が異なる点であると仮定すれば（左上図），点 O, O′ともに辺 CA の垂直二等分線上にある異なる点である．
辺 BC の垂直二等分線と辺 CA の垂直二等分線の交点は 1 つしかないので，
点 O′が辺 BC の垂直二等分線 OL 上にないことになり，O′B ≠ O′C となり矛盾．
ゆえに，点 O と点 O′が異なる点という仮定が $\boxed{\textbf{背理}}$ 法により否定され，点 O と点 O′は一致する．

以上から，三角形の外心は各辺の垂直二等分線の交点であり，必ず **1** 点で交わる．

4. $\boxed{}$ をうめよ.（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分 ）



★ △ABC の $\boxed{\textbf{外心}}$ は △LMN の $\boxed{\textbf{垂心}}$ である．
証明
左図のように，△ABC の各辺の中点を L, M, N とすれば，
線分 OL, OM, ON は △ABC の各辺の垂直二等分線になるので，
点 O は △ABC の $\boxed{\textbf{外心}}$ である．

次に △LMN について考える．
△ABC に $\boxed{\textbf{中点連結}}$ 定理を適用すれば，NM と BC は $\boxed{\textbf{平行}}$ だから，
$\boxed{\textbf{錯}}$ 角は等しく，　∠NPL = ∠CLP = 90°　⇒　LP ⊥ $\boxed{\textbf{MN}}$

同様にして，　MQ ⊥ $\boxed{\textbf{NL}}$　かつ　NR ⊥ $\boxed{\textbf{LM}}$
ゆえに，点 O は △LMN の各頂点から対辺への垂線の交点であり，△LMN の $\boxed{\textbf{垂心}}$ である．

以上の結果から，△ABC の $\boxed{\textbf{外心}}$ は △LMN の $\boxed{\textbf{垂心}}$ である．