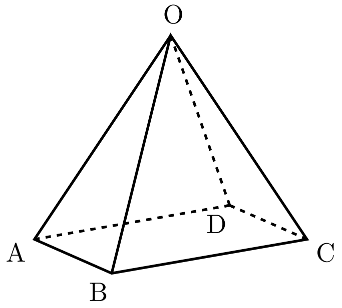
反射テスト　立体切断　正四角すい　01

1.　正四角すい O-ABCD を平面 PQRS で切断する．P,Q,R,S はそれぞれ辺 OA,OB,OC,OD 上の点である．頂点 O から底面 ABCD に下ろした垂線の足を H とし, OH と切断面 PQRS との交点を T とする．
OP : PA = 1 : 5 , OQ : QB = 1 : 2 , R は C と一致する とき, 次の問に答えよ．

（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）

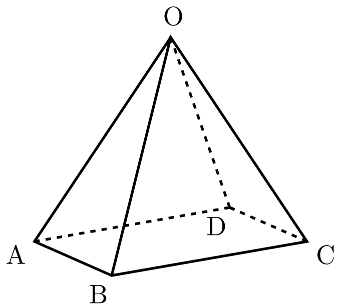


(1)　OS : SD を求めよ．

(2)　切断後, O のある立体の体積は,
元の正四角すいの体積の何倍かを求めよ．

2. 正四角すい O-ABCD を平面 PQRS で切断する．P,Q,R,S はそれぞれ辺 OA,OB,OC,OD 上の点である．頂点 O から底面 ABCD に下ろした垂線の足を H とし, OH と切断面 PQRS との交点を T とする．
OP : PA $= 1 : 5$, OQ : QB $= 1 : 3$, OR : RC $= 1 : 2$ とするとき, 次の問に答えよ.

（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）



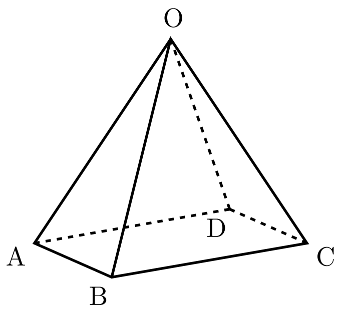
(1)　OS : SD を求めよ.

(2)　切断後, O のある立体の体積は,
元の正四角すいの体積の何倍かを求めよ.

反射テスト　立体切断　正四角すい　01　解答解説

1.　正四角すい O-ABCD を平面 PQRS で切断する．P,Q,R,S はそれぞれ辺 OA,OB,OC,OD 上の点である．頂点 O から底面 ABCD に下ろした垂線の足を H とし，OH と切断面 PQRS との交点を T とする．
OP : PA = 1 : 5 , OQ : QB = 1 : 2 , R は C と一致する とき，次の問に答えよ．

（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 4 分 ）



(1)　OS : SD を求めよ．

(2)　切断後，O のある立体の体積は，
元の正四角すいの体積の何倍かを求めよ．

図 1

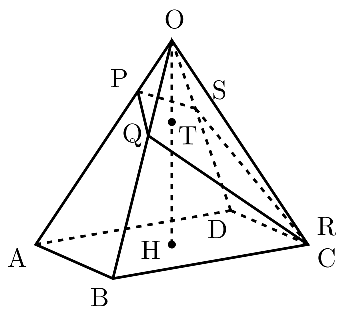


図 2

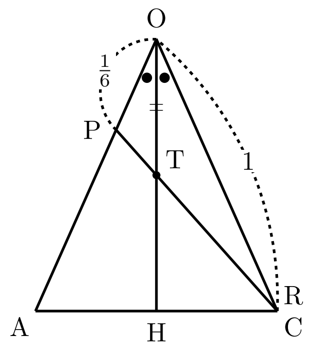
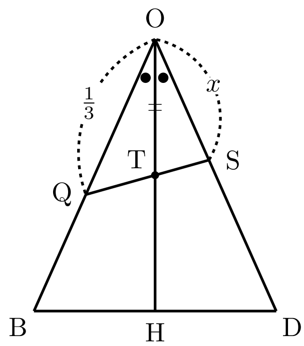
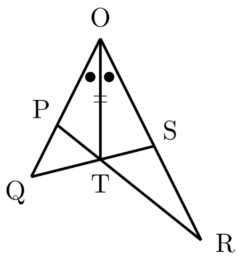


図 3



★シーソーの定理

図 4



$$\mathbf{\frac{1}{OP}+\frac{1}{OR}=\frac{1}{OQ}+\frac{1}{OS}}$$

(1)　OA = OB = OC = OD = 1 と考えて，

OP : PA = 1 : 5　⇒　$\mathrm{OP} = \dfrac{1}{6}$　，　OQ : QB = 1 : 2　⇒　$\mathrm{OQ} = \dfrac{1}{3}$

R は C と一致　⇒　OR = 1　，　OS : SD を求めたい　⇒　OS = x とおく

★ 立体難問　⇒　投影図

面 OAC, 面 OBD をそれぞれ考える（図 2, 図 3）．

左図 4 の **★ シーソーの定理**（★調和平均の応用）から，

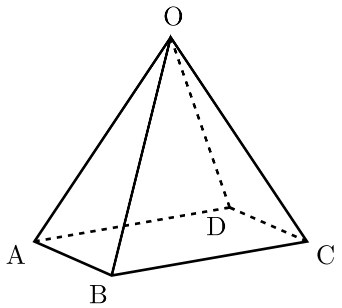
$$\frac{1}{\frac{1}{6}}+\frac{1}{1}=\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{OS}:\mathrm{SD}=\frac{1}{4}:\left(1-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{1:3}$$

(2)　★ 三角すいの切断 を使うために，正四角すいを三角すい OABC と三角すい OACD に分けて考える．

$$\begin{aligned}
\text{四角すい OPQRS} &= \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OC}}\cdot\text{三角すい OABC} + \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OC}}\cdot\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OD}}\cdot\text{三角すい OACD} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\text{正四角すい OABCD} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\text{正四角すい OABCD} \\
&= \frac{1}{36}\ \text{正四角すい OABCD} + \frac{1}{48}\ \text{正四角すい OABCD} = \mathbf{\frac{7}{144}}
\end{aligned}$$

2. 正四角すい O-ABCD を平面 PQRS で切断する．P,Q,R,S はそれぞれ辺 OA,OB,OC,OD 上の点である．頂点 O から底面 ABCD に下ろした垂線の足を H とし, OH と切断面 PQRS との交点を T とする．
OP : PA = 1 : 5 , OQ : QB = 1 : 3 , OR : RC = 1 : 2 とするとき, 次の問に答えよ．

（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 4 分 ）



（1） OS : SD を求めよ．

（2） 切断後, O のある立体の体積は,
元の正四角すいの体積の何倍かを求めよ．

図 1

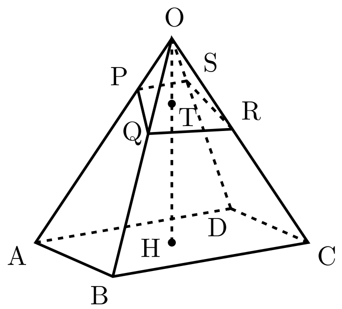


図 2

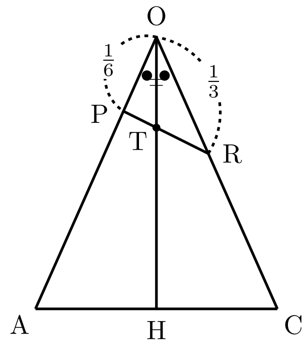
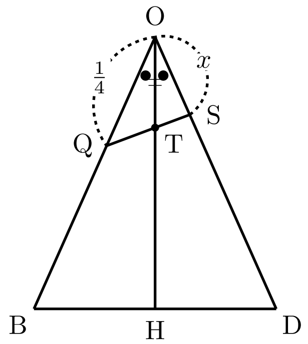
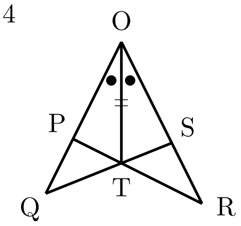


図 3



★シーソーの定理

図 4



$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{OP}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{OR}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{OQ}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{OS}}$$

(1) OA = OB = OC = OD = 1 と考えて,

OP : PA = 1 : 5 $\Rightarrow$ OP $= \frac{1}{6}$, OQ : QB = 1 : 3 $\Rightarrow$ OQ $= \frac{1}{4}$

OR : RC = 1 : 2 $\Rightarrow$ OR $= \frac{1}{3}$, OS : SD を求めたい $\Rightarrow$ OS $= x$ とおく

★ 立体難問 $\Rightarrow$ 投影図

面 OAC, 面 OBD をそれぞれ考える（図 2, 図 3）．

左図 4 の **★ シーソーの定理**（★調和平均の応用）から,

$$\frac{1}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{OS} : \mathrm{SD} = \frac{1}{5} : \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \mathbf{1 : 4}$$

(2) ★ 三角すいの切断 を使うために, 正四角すいを三角すい OABC と三角すい OACD に分けて考える．

$$\begin{aligned}
\text{四角すい OPQRS} &= \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} \cdot \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB}} \cdot \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OC}} \cdot \text{三角すい OABC} + \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} \cdot \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OC}} \cdot \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OD}} \cdot \text{三角すい OACD} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\text{正四角すい OABCD} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\text{正四角すい OABCD} \\
&= \frac{1}{144}\ \text{正四角すい OABCD} + \frac{1}{180}\ \text{正四角すい OABCD} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{80}}
\end{aligned}$$