反射テスト　立体切断　正四面体　辺に平行な面での切断　01

1.　1 辺の長さ 6 の正四面体 ABCD を平面 PQR で切断する. P は辺 AC の中点, Q は辺 AB の中点, R は辺 BD を BR : RD = 1 : 2 に分ける点であり, 切断面と辺 CD との交点を S とする.　（ S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1)　四角形 PQRS は特別な四角形である. その名称をいえ.

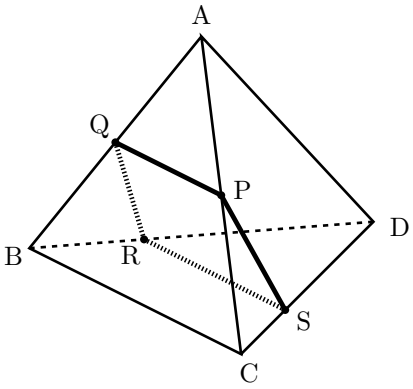
(2)　CS の長さを求めよ.

(3)　BC の中点を M とする. △AMD の面積を求めよ.

(4)　面 AMD と線分 QP,RS との交点をそれぞれ T,U とする. △TMU の面積を求めよ.

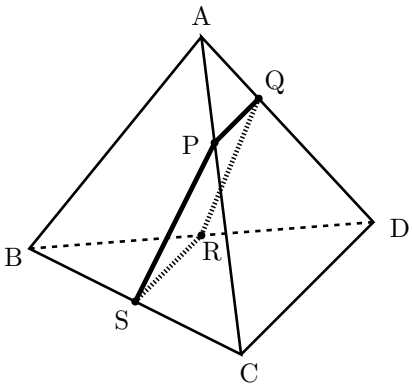
(5)　面 PQRS でこの正四面体を切断したとき, B を含む立体の体積を求めよ.

(6)　面 PQRS でこの正四面体を切断したとき, A を含む立体の体積を求めよ.



ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2.　1 辺の長さ 1 の正四面体 ABCD を平面 PQR で切断する．P は辺 AC を AP : PC = 1 : 2 に, Q は辺 AD を AQ : QD = 1 : 2 に分け, R は辺 BD の中点である．また切断面 PQR と辺 BC との交点を S とする．このとき切断面で分かれる 2 つの立体の体積比を求めよ．ただし A を含む立体から先にいえ．　（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分 40 秒, B 級 6 分, C 級 8 分 ）



ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　立体切断　正四面体　辺に平行な面での切断　01　解答解説

1.　1 辺の長さ 6 の正四面体 ABCD を平面 PQR で切断する．P は辺 AC の中点, Q は辺 AB の中点, R は辺 BD を BR : RD = 1 : 2 に分ける点であり, 切断面と辺 CD との交点を S とする．　（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 8 分 ）

(1)　四角形 PQRS は特別な四角形である．その名称をいえ．

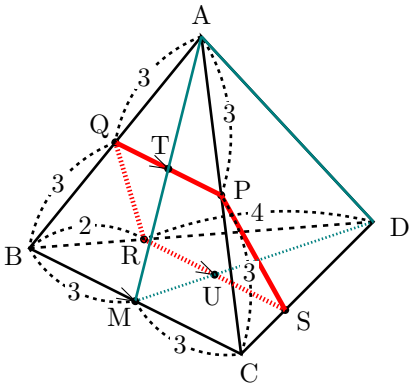
(2)　CS の長さを求めよ．

(3)　BC の中点を M とする．△AMD の面積を求めよ．

(4)　面 AMD と線分 QP,RS との交点をそれぞれ T,U とする．△TMU の面積を求めよ．

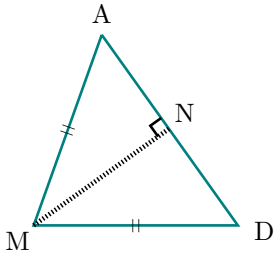
(5)　面 PQRS でこの正四面体を切断したとき, B を含む立体の体積を求めよ．

(6)　面 PQRS でこの正四面体を切断したとき, A を含む立体の体積を求めよ．

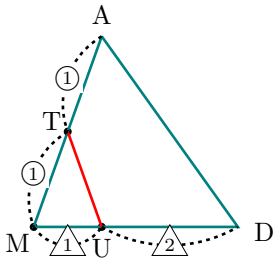


(1)　**★ 正四面体の切断　辺に平行な場合**
対称性から二等辺三角形か等脚台形ができる．
QP が正四面体の **辺に平行** で切断面が四角形．
四角形の対辺 RS も QP,BC に平行になる．
⇒　四角形 PQRS は **等脚台形**．

(2)　QP // BC // RS となるので,
$\mathrm{CS} = \mathrm{BR} = 6 \times \dfrac{1}{1+2} = \mathbf{2}$



★ 難しい切断は投影図 切断面が直線にみえる方向から見る. (左図と左下図)
(3)　MA と MD はともに 1 辺の長さ 6 の正三角形の高さだから,
△MDA は二等辺三角形.　⇒　$\mathrm{MA} = \mathrm{MD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$
AD は正四面体の辺だから, $\mathrm{NA} = \mathrm{ND} = \mathrm{AD} \div 2 = 6 \div 2 = 3$
よって,　$\mathrm{MN} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$
$\triangle\mathrm{AMD} = \dfrac{\mathrm{DA} \times \mathrm{MN}}{2} = \dfrac{6 \times 3\sqrt{2}}{2} = \mathbf{9\sqrt{2}}$



(4)　QP // BC より, AT : TM = AP : PC = 3 : 3 = ① : ①
RS // BC より, DU : UM = DR : RB = 4 : 2 = △2 : △1
以上から,

$$\triangle\mathrm{TMU} = \triangle\mathrm{AMD} \times \frac{①}{①+①} \times \frac{△1}{△1+△2} = 9\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

(5)　平行線から, △AQP , △DRS は正三角形だから, PQ = 3 , SR = 4 .
∴　立体 PCSQBR　=　△TMU × 高さの平均　(PQ, CB, SR の平均)　← ☆どれも底面に垂直.

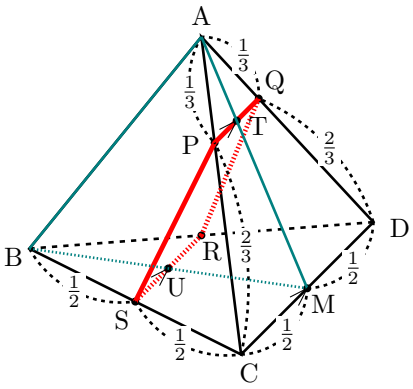
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{6+3+4}{3} = \frac{\mathbf{13\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

(6)　**★ 正四面体の体積 (1 辺 a) $= \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$**　⇒　正四面体 ABCD $= \dfrac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 = 18\sqrt{2}$

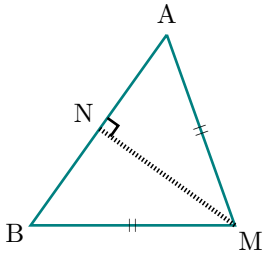
よって, A を含む立体の体積は,　$18\sqrt{2} - \dfrac{13\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\mathbf{23\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

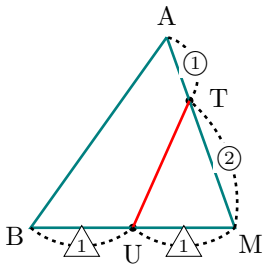
2.　1 辺の長さ 1 の正四面体 ABCD を平面 PQR で切断する．P は辺 AC を AP : PC = 1 : 2 に，Q は辺 AD を AQ : QD = 1 : 2 に分け，R は辺 BD の中点である．また切断面 PQR と辺 BC との交点を S とする．このとき切断面で分かれる 2 つの立体の体積比を求めよ．ただし A を含む立体から先にいえ．　　（ S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分 40 秒，B 級 6 分，C 級 8 分 ）



★ 正四面体の切断　辺に平行な場合
対称性から二等辺三角形か等脚台形ができる．
PQ が正四面体の **辺に平行** で切断面が四角形．
四角形の対辺 SR も PQ,CD に平行になる．
　⇒　四角形 PQRS は **等脚台形**．
よって，BS : SC = BR : RD = 1 : 1



★ 難しい切断は投影図 切断面が直線にみえる方向から見る．(左図と左下図)
MA と MB はともに 1 辺の長さ 1 の正三角形の高さだから，
△MAB は二等辺三角形．　⇒　$\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
AB は正四面体の辺だから，$\mathrm{NA}=\mathrm{NB}=\mathrm{AB}\div 2=1\div 2=\dfrac{1}{2}$
よって，　$\mathrm{MN}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\triangle\mathrm{ABM}=\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{MN}}{2}=1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$



PQ // CD より，AT : TM = AP : PC = ① : ②
SR // CD より，BU : UM = BS : SC = △1 : △1
以上から，

$$\triangle\mathrm{TUM}=\triangle\mathrm{AMD}\times\frac{②}{①+②}\times\frac{△1}{△1+△1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

平行線から，△APQ , △BSR は正三角形だから，$\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{SR}=\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\quad \text{立体 PSC} - \text{QRD} = \triangle\mathrm{TUM}\times\text{高さの平均}\quad(\mathrm{PQ},\mathrm{SR},\mathrm{CD}\text{ の平均})\quad\leftarrow ☆\text{どれも底面 TUM に垂直．}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\times\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1}{3}=\frac{11\sqrt{2}}{216}$$

★ 正四面体の体積 (1 辺 a) $=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$　⇒　正四面体 ABCD $=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times 1^3=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

よって，A を含む立体の体積は，$\dfrac{\sqrt{2}}{12}-\dfrac{11\sqrt{2}}{216}=\dfrac{7\sqrt{2}}{216}$ ⇒ 答えは，$\dfrac{7\sqrt{2}}{216}:\dfrac{11\sqrt{2}}{216}=\mathbf{7:11}$

☆別解　色々なパラメータがわかるので上の解法も重要だが，体積比を求めるだけなら次の方法が早い．
体積比は基本的に線分比・面積比から
△ABM の面積を S とする．正四面体の体積は $S\times\mathrm{CD}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{S}{3}$

$\triangle\mathrm{TUM}=S\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{S}{3}$

立体 PSCQRD $=\triangle\mathrm{TUM}\times$ 高さの平均 $=\dfrac{S}{3}\times\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1}{3}=\dfrac{11S}{54}$

$\therefore\quad\left(\dfrac{S}{3}-\dfrac{11S}{54}\right):\dfrac{11S}{54}=\mathbf{7:11}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）