# 反射テスト　立体切断　正四面体　辺に平行な面での切断　01

**1.**　1 辺の長さ 6 の正四面体 ABCD を平面 PQR で切断する. P は辺 AC の中点, Q は辺 AB の中点, R は辺 BD を BR : RD = 1 : 2 に分ける点であり, 切断面と辺 CD との交点を S とする.　（ $S$ 級 2 分 30 秒, $A$ 級 4 分, $B$ 級 6 分, $C$ 級 8 分 ）

（1）　四角形 PQRS は特別な四角形である. その名称をいえ.

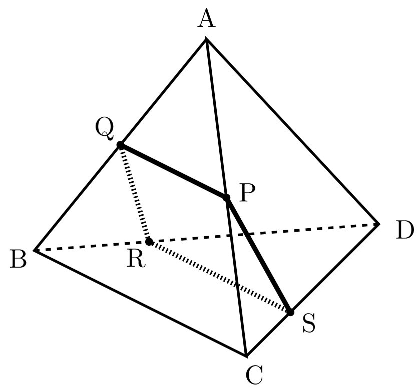
（2）　CS の長さを求めよ.

（3）　BC の中点を M とする. △ AMD の面積を求めよ.

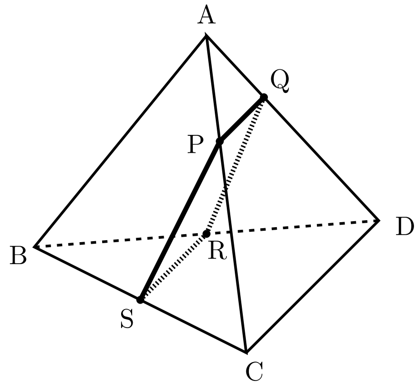
（4）　面 AMD と線分 QP, RS との交点をそれぞれ T, U とする. △ TMU の面積を求めよ.

（5）　面 PQRS でこの正四面体を切断したとき, B を含む立体の体積を求めよ.

（6）　面 PQRS でこの正四面体を切断したとき, A を含む立体の体積を求めよ.



**2.** 1辺の長さ1の正四面体ABCDを平面PQRで切断する. Pは辺ACをAP : PC = 1 : 2に, Qは辺ADをAQ : QD = 1 : 2に分け, Rは辺BDの中点である. また切断面PQRと辺BCとの交点をSとする. このとき切断面で分かれる2つの立体の体積比を求めよ. ただしAを含む立体から先にいえ. （ $S$ 級1分30秒, $A$ 級3分40秒, $B$ 級6分, $C$ 級8分 ）



# 反射テスト　立体切断　正四面体　辺に平行な面での切断　01　解答解説

**1.**　1 辺の長さ 6 の正四面体 ABCD を平面 PQR で切断する. P は辺 AC の中点, Q は辺 AB の中点, R は辺 BD を BR : RD = 1 : 2 に分ける点であり, 切断面と辺 CD との交点を S とする.　（ $S$ 級 2 分 30 秒, $A$ 級 4 分, $B$ 級 6 分, $C$ 級 8 分 ）

(1)　四角形 PQRS は特別な四角形である. その名称をいえ.

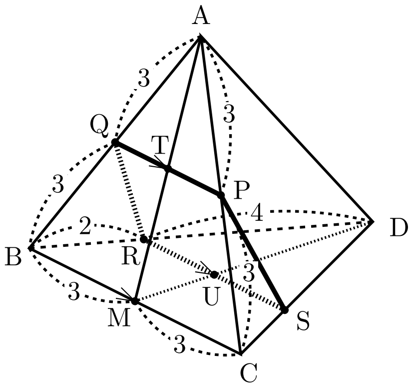
(2)　CS の長さを求めよ.

(3)　BC の中点を M とする. △ AMD の面積を求めよ.

(4)　面 AMD と線分 QP, RS との交点をそれぞれ T, U とする. △ TMU の面積を求めよ.

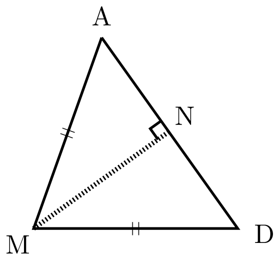
(5)　面 PQRS でこの正四面体を切断したとき, B を含む立体の体積を求めよ.

(6)　面 PQRS でこの正四面体を切断したとき, A を含む立体の体積を求めよ.

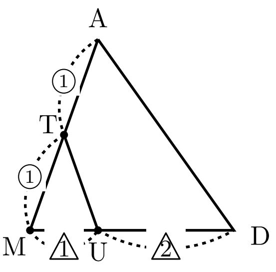



(1)　★ **正四面体の切断　辺に平行な場合**
対称性から二等辺三角形か等脚台形ができる.
QP が正四面体の **辺に平行** で切断面が四角形
四角形の対辺 RS も QP, BC に平行になる.
　⇒　四角形 PQRS は **等脚台形**

(2)　QP // BC // RS となるので,
$$\mathrm{CS} = \mathrm{BR} = 6 \times \frac{1}{1+2} = \mathbf{2}$$




(3)　MA と MD はともに 1 辺の長さ 6 の正三角形の高さだから,
△ MDA は二等辺三角形.　⇒　$\mathrm{MA} = \mathrm{MD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$
AD は正四面体の辺だから, NA = ND = AD ÷ 2 = 6 ÷ 2 = 3
よって,　$\mathrm{MN} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$
$$\triangle \mathrm{AMD} = \frac{\mathrm{DA} \times \mathrm{MN}}{2} = \frac{6 \times 3\sqrt{2}}{2} = \mathbf{9\sqrt{2}}$$

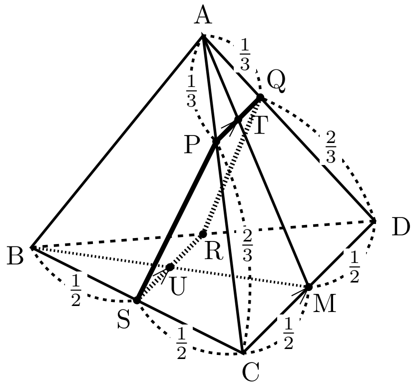



(4)　QP // BC より, AT : TM = AP : PC = 3 : 3 = ① : ①
　RS // BC より, DU : UM = DR : RB = 4 : 2 = ②△ : ①△
以上から,
$$\triangle \mathrm{TMU} = \triangle \mathrm{AMD} \times \frac{①}{① + ①} \times \frac{①△}{①△ + ②△}$$
$$= 9\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

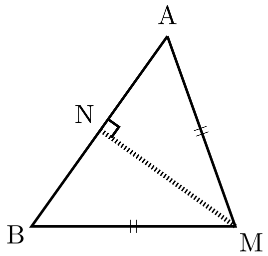
(5)　平行線から, △ AQP, △ DRS は正三角形だから, PQ = 3 , SR = 4 .
∴　立体 PCS − QBR = △ TMU × 高さの平均　(ここでの高さは 3 本 PQ, CB, SR の平均)　←☆どれも底面に垂直
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{6+3+4}{3} = \mathbf{\frac{13\sqrt{2}}{2}}$$

(6)　★ **正四面体の体積 (1 辺 $a$) $= \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$**　⇒　正四面体 ABCD $= \dfrac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 = 18\sqrt{2}$
よって, A を含む立体の体積は,　$18\sqrt{2} - \dfrac{13\sqrt{2}}{2} = \mathbf{\dfrac{23\sqrt{2}}{2}}$

**2.** 1辺の長さ1の正四面体ABCDを平面PQRで切断する．Pは辺ACをAP : PC = 1 : 2に，Qは辺ADをAQ : QD = 1 : 2に分け，Rは辺BDの中点である．また切断面PQRと辺BCとの交点をSとする．このとき切断面で分かれる2つの立体の体積比を求めよ．ただしAを含む立体から先にいえ．　　（ $S$ 級1分30秒，$A$ 級3分40秒，$B$ 級6分，$C$ 級8分 ）



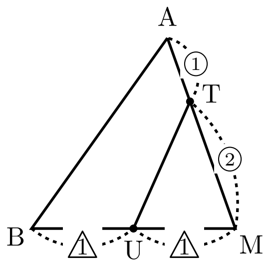

**★ 正四面体の切断　辺に平行な場合**
対称性から二等辺三角形か等脚台形ができる．
PQが正四面体の **辺に平行** で切断面が四角形
四角形の対辺SRもPQ, CDに平行になる．
　⇒　四角形 PQRS は **等脚台形**
よって，BS : SC = BR : RD = 1 : 1




MAとMBはともに1辺の長さ1の正三角形の高さだから，
△MABは二等辺三角形．　⇒　$\mathrm{MA} = \mathrm{MB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
ABは正四面体の辺だから，$\mathrm{NA} = \mathrm{NB} = \mathrm{AB} \div 2 = 1 \div 2 = \dfrac{1}{2}$

よって，　$\mathrm{MN} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\triangle \mathrm{ABM} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{MN}}{2} = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$




PQ // CD より，AT : TM = AP : PC = ① : ②
SR // CD より，BU : UM = BS : SC = △1 : △1
以上から，

$$\triangle \mathrm{TUM} = \triangle \mathrm{AMD} \times \frac{②}{① + ②} \times \frac{\triangle 1}{\triangle 1 + \triangle 1}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

平行線から，△APQ, △BSRは正三角形だから，$\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{3}$ ，$\mathrm{SR} = \dfrac{1}{2}$ ．
∴　立体 PSC − QRD = △TUM × 高さの平均　(ここでの高さは3本PQ, SR, CDの平均)　←☆どれも底面TUMに垂直
$$= \frac{\sqrt{2}}{12} \times \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1}{3} = \frac{11\sqrt{2}}{216}$$

**★ 正四面体の体積 (1辺 $a$) $= \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$**　⇒　正四面体 ABCD $= \dfrac{\sqrt{2}}{12} \times 1^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$
よって，Aを含む立体の体積は，　$\dfrac{\sqrt{2}}{12} - \dfrac{11\sqrt{2}}{216} = \dfrac{7\sqrt{2}}{216}$　⇒　答えは，$\dfrac{7\sqrt{2}}{216} : \dfrac{11\sqrt{2}}{216} = \mathbf{7 : 11}$

☆別解　色々なパラメータがわかるので上の解法も重要だが，体積比を求めるだけなら次の方法が早い．
**体積比は基本的に線分比・面積比から**
△ABMの面積を $S$ とする．正四面体の体積は $S \times \mathrm{CD} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{S}{3}$

$\triangle \mathrm{TUM} = S \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{S}{3}$

立体 PSC − QRD = △TUM × 高さの平均 $= \dfrac{S}{3} \times \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1}{3} = \dfrac{11S}{54}$

∴　$\left(\dfrac{S}{3} - \dfrac{11S}{54}\right) : \dfrac{11S}{54} = \mathbf{7 : 11}$