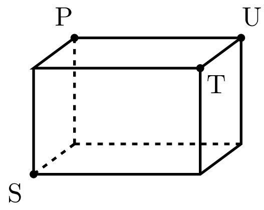
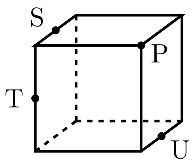
反射テスト　立体　距離　点と面の距離　02

1.　点 P と面 STU との距離を求めよ.（ S 級 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1)　縦 4, 横 8, 高さ 6 の直方体.

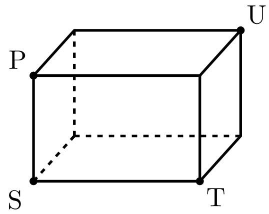


(2)　1 辺の長さ 6 の立方体.
ただし, S, T, U は各辺の中点.

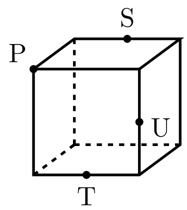


2. 点 P と面 STU との距離を求めよ.（ S 級 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1) 縦 6, 横 12, 高さ 9 の直方体.



(2) 1 辺の長さ 20 の立方体.
ただし, S, T, U は各辺の中点.



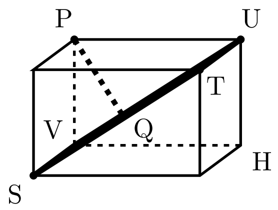
反射テスト　立体　距離　点と面の距離　02　解答解説

1.　点 P と面 STU との距離を求めよ.（ S 級 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

★ **点と面との距離**…点から面に下ろした垂線の長さ

★ **正方形 (一辺の長さ a) の対角線の長さ** は,　$\boldsymbol{\sqrt{2}a}$
★ **長方形 (縦 a, 横 b) の頂点と対角線との距離** は,　$\boldsymbol{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$
★ **立方体 (一辺の長さ a) の対角線の長さ** は,　$\boldsymbol{\sqrt{3}a}$

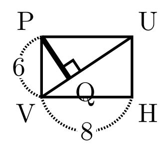
(1)　縦 4, 横 8, 高さ 6 の直方体.



★切断面は **長方形**

★ **点 P と面 STU との距離** は図の PQ
★ **長方形の頂点と対角線との距離**
縦 a, 横 b の長方形の頂点と対角線との距離は
$\boldsymbol{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

(1) 解答
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ
　＝下図の長方形における P と対角線との距離 PQ
　$= \dfrac{6\times 8}{\sqrt{6^2+8^2}} = \dfrac{48}{10} = \boldsymbol{\dfrac{24}{5}}$

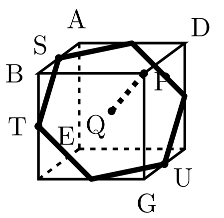


☆別解　★ **切断と影は投影図**
切断面 が一直線に見えるように,
直方体を正面から見た.

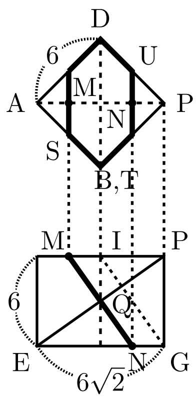
△PVU の面積を考えて,
$\dfrac{\mathrm{UV}\times\mathrm{PQ}}{2} = \dfrac{\mathrm{PV}\times\mathrm{PU}}{2}$

$\Leftrightarrow\quad \mathrm{PQ} = \dfrac{\mathrm{PV}\times\mathrm{PU}}{\mathrm{UV}}$
$\therefore\quad \mathrm{PQ} = \dfrac{6\times 8}{10} = \dfrac{24}{5}$

(2)　1 辺の長さ 6 の立方体.
ただし, S, T, U は各辺の中点.



★ **点 P と面 STU との距離**
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ ＝ 線分 PQ
★ **切断面が正六角形** のとき,
　線分 PQ ＝ 立方体の **対角線の半分**
　　　$= 6\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}$
　　　$= \boldsymbol{3\sqrt{3}}$



★ PQ ＝ **対角線の半分** の証明

左図の上は立方体を真上から,
下は **切断面**(太線) が一直線に
見える方向から見た **投影図** である.

下の図で考える.
△QPM ≡ △QEN であるから,
あとは △QPM が直角三角形に
なるか確かめればよい.

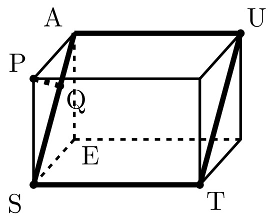
PQ ⊥ MN の証明
△PMQ の三辺を調べる.
　$\mathrm{PM} = 6\sqrt{2}\times\frac{3}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$
　$\mathrm{MQ} = \frac{1}{2}\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{IG}$
　　$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+6^2} = \frac{1}{2}\times 3\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

　$\mathrm{PM}^2 = \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{81}{2}$

　$\mathrm{MQ}^2+\mathrm{QP}^2 = \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = \frac{27}{2}+27 = \frac{81}{2}$
$\mathrm{PM}^2 = \mathrm{MQ}^2+\mathrm{QP}^2 \Rightarrow$ 三平方の定理より, $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{MN}$

2. 点 P と面 STU との距離を求めよ.（ S 級 50 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1) 縦 6, 横 12, 高さ 9 の直方体.



★切断面は **長方形**

★ 点 P と面 STU との距離 は図の PQ

★ 長方形の頂点と対角線との距離

縦 a, 横 b の長方形の頂点と対角線との距離は

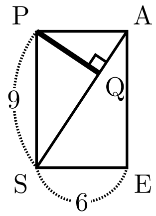
$$\frac{\boldsymbol{ab}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}}$$

(1) 解答

点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ

$=$ 下図の長方形における P と対角線との距離 PQ

$$=\frac{9\times 6}{\sqrt{9^2+6^2}}=\frac{54}{3\sqrt{13}}=\boldsymbol{\frac{18\sqrt{13}}{13}}$$



☆別解 **★ 切断と影は投影図**

切断面 が一直線に見えるように, 直方体を正面から見た.

△PVU の面積を考えて,

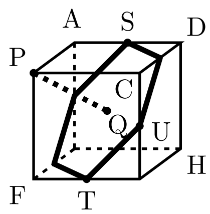
$$\frac{\mathrm{SA}\times\mathrm{PQ}}{2}=\frac{\mathrm{PS}\times\mathrm{PE}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{PQ}=\frac{\mathrm{PS}\times\mathrm{PE}}{\mathrm{SA}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}=\frac{9\times 6}{3\sqrt{13}}=\frac{18\sqrt{13}}{13}$$

(2) 1 辺の長さ 20 の立方体.

ただし, S, T, U は各辺の中点.



★ 点 P と面 STU との距離

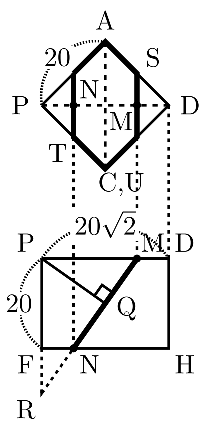
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ $=$ 線分 PQ

★ 切断面が正六角形 のとき,

線分 PQ $=$ 立方体の **対角線の半分**

$$=20\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$$

$$=\boldsymbol{10\sqrt{3}}$$



☆別解

1(2) と別解法を下の図で考える.

△PRM をイメージすれば,

垂線 PQ を公式で求められる.

△PRM ∽ △FRN

この相似比が, PM : FN = 3 : 1

$$\therefore\quad \begin{cases}\mathrm{PR}=\frac{3}{2}\mathrm{PF}=30\\ \mathrm{PM}=\frac{3}{4}\mathrm{PD}=15\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}=\frac{\mathrm{PR}\times\mathrm{PM}}{\sqrt{\mathrm{PR}^2+\mathrm{PM}^2}}$$

$$=\frac{30\times 15\sqrt{2}}{30^2+\left(15\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{450\sqrt{2}}{15\sqrt{6}}=10\sqrt{3}$$