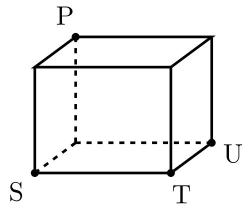
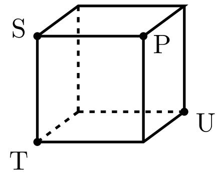
反射テスト　立体　距離　点と面の距離　01

1.　点 P と面 STU との距離を求めよ.（ S 級 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分 ）

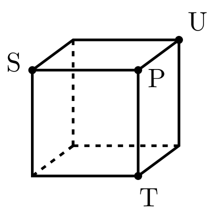
(1)　縦 3, 横 6, 高さ 4 の直方体.



(2)　1 辺の長さ 4 の立方体.

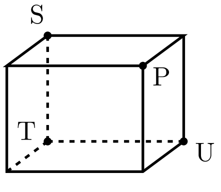


(3)　1 辺の長さ 6 の立方体.

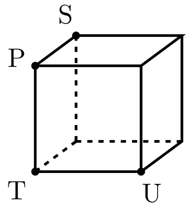


2. 点 P と面 STU との距離を求めよ. (S 級 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分)

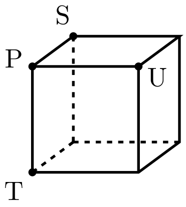
(1) 縦 3, 横 6, 高さ 4 の直方体.



(2) 1 辺の長さ 8 の立方体.



(3) 1 辺の長さ 12 の立方体.



反射テスト　立体　距離　点と面の距離　01　解答解説

1. 点 P と面 STU との距離を求めよ.（ S 級 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分 ）

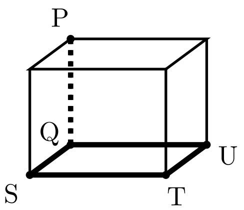
★ 点と面との距離…点から面に下ろした垂線の長さ

★ 正方形の対角線の長さ
一辺の長さが a の正方形の対角線の長さは,　$\boldsymbol{\sqrt{2}a}$

★ 長方形の頂点と対角線との距離
縦 a, 横 b の長方形の頂点と対角線との距離は,　$\boldsymbol{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

★ 立方体の対角線の長さ
一辺の長さが a の立方体の対角線の長さは,　$\boldsymbol{\sqrt{3}a}$

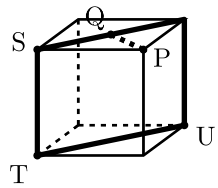
(1)　縦 3, 横 6, 高さ 4 の直方体.



★ 点 P と面 STU との距離
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ ＝ 線分 PQ

$$\mathrm{PQ} = \text{直方体の高さ} = \mathbf{4}$$

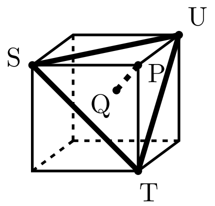
(2)　1 辺の長さ 4 の立方体.



★ 点 P と面 STU との距離
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ ＝ 線分 PQ

$$\mathrm{PQ} = \text{正方形の対角線} \times \frac{1}{2}$$
$$= 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

(3)　1 辺の長さ 6 の立方体.

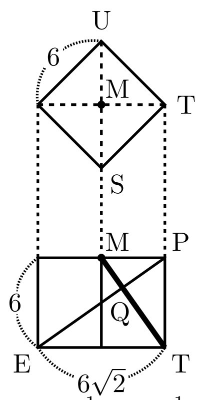


★ 点 P と面 STU との距離
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ ＝ 線分 PQ
★ 体積からの逆算
線分 PQ の長さを h とおく.
△STU は 1 辺 $6\sqrt{2}$の正三角形だから,

$$\triangle\mathrm{STU} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 18\sqrt{3}$$

$$\text{三角すい P} - \mathrm{STU} = 6 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{1}{3} = 36$$

よって,　$18\sqrt{3} \times h \times \dfrac{1}{3} = 36$
これを解いて,　$h = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$



☆ (3) 別解
★ 切断と影は投影図
左図の上は立方体を真上から,
下は **切断面**(太線) が一直線に
見える方向から見た **投影図** である.

下の図で考える.
△QPM ∽ △QET より,
　PQ : QE = 1 : 2

$$\mathrm{PQ} = \tfrac{1}{3}\mathrm{PE} = \tfrac{1}{3} \times 6\sqrt{3} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

PQ ⊥ MT の証明
PMQ の三辺を調べる.

$$\mathrm{PM} = 3\sqrt{2}$$
$$\mathrm{MQ} = \tfrac{1}{3} \times \mathrm{MT} = \tfrac{1}{3}\sqrt{\mathrm{PM}^2 + \mathrm{PT}^2}$$
$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + 6^2} = \tfrac{1}{3} \times 3\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

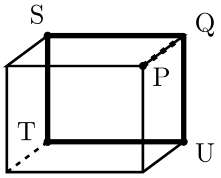
$$\mathrm{PM}^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18$$

$$\mathrm{MQ}^2 + \mathrm{QP}^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 6 + 12 = 18$$

$\mathrm{PM}^2 = \mathrm{MQ}^2 + \mathrm{QP}^2 \Rightarrow$ 三平方の定理より, $\mathrm{PQ} \perp \mathrm{MQ}$

2. 点 P と面 STU との距離を求めよ.（ S 級 35 秒, A 級 2 分, B 級 3 分 40 秒, C 級 5 分 ）

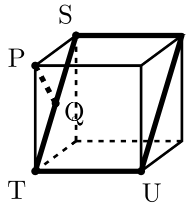
(1) 縦 3, 横 6, 高さ 4 の直方体.



★ 点 P と面 STU との距離
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ ＝ 線分 PQ

$$\text{PQ} = \text{直方体の縦} = \mathbf{3}$$

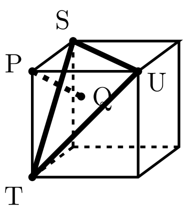
(2) 1 辺の長さ 8 の立方体.



★ 点 P と面 STU との距離
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ ＝ 線分 PQ

$$\text{PQ} = \text{正方形の対角線} \times \frac{1}{2}$$
$$= 8\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \mathbf{4\sqrt{2}}$$

(3) 1 辺の長さ 12 の立方体.



★ 点 P と面 STU との距離
点 P から面 STU に下ろした垂線の長さ ＝ 線分 PQ

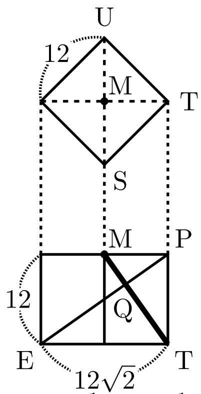
★ 体積からの逆算
線分 PQ の長さを h とおく.
△STU は 1 辺 $12\sqrt{2}$ の正三角形だから,

$$\triangle\text{STU} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(12\sqrt{2}\right)^2 = 72\sqrt{3}$$

$$\text{三角すい P} - \text{STU} = 12 \times 12 \times \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{3} = 288$$

よって, $72\sqrt{3} \times h \times \dfrac{1}{3} = 288$

これを解いて, $h = \mathbf{4\sqrt{3}}$



☆ (3) 別解
★ 切断と影は投影図
左図の上は立方体を真上から,
下は **切断面**(太線) が一直線に
見える方向から見た **投影図** である.

下の図で考える.
△QPM ∽ △QET より,
PQ : QE = 1 : 2

$$\text{PQ} = \tfrac{1}{3}\text{PE} = \tfrac{1}{3} \times 12\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$$

★ PQ は対角線の $\mathbf{\frac{1}{3}}$
1(3) の☆別解参照.