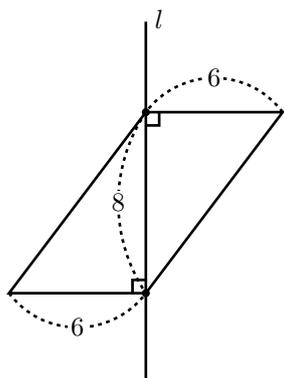


反射テスト 立体図形 回転体 回転体の体積 03

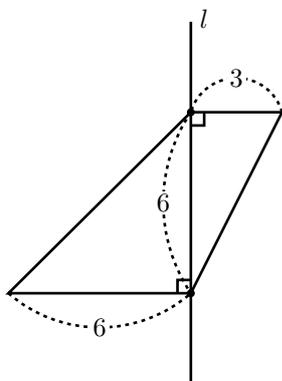
1. 直線 l を軸として次の線分を1回転させたときにできる立体の体積を求めよ. 円周率は π とする.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1)



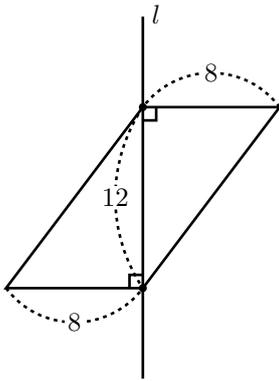
(2)



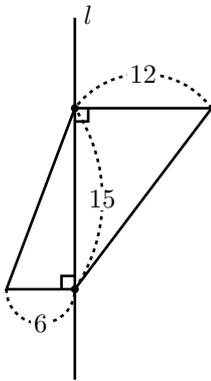
2. 直線 l を軸として次の線分を 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ. 円周率は π とする.

(S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分 30 秒, C 級 7 分)

(1)



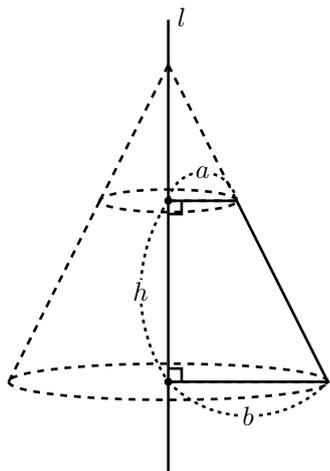
(2)



反射テスト 立体図形 回転体 回転体の体積 03 解答解説

1. 直線 l を軸として次の線分を 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ. 円周率は π とする.

(S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)



★ 台形の回転体は円すい台

左図実線の台形を l を軸として回転したとき, できる立体を円すい台という.

公式 1

★ 円すい台の体積 = 大円すい - 小円すい

これが基本である. 左図のように補助線 (点線) を引いて, 相似を考える. 体積比が相似比の 3 乗であることを使ってもよい.

公式 2

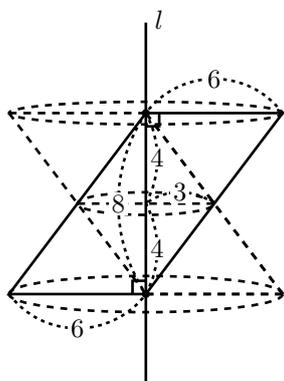
$$\text{★ 円すい台の体積} = \frac{\pi(a^2 + ab + b^2)h}{3}$$

☆是非相似を用いて証明してから使ってほしい. その際,

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

という公式を用いると約分後, 上の式を導ける.

(1)



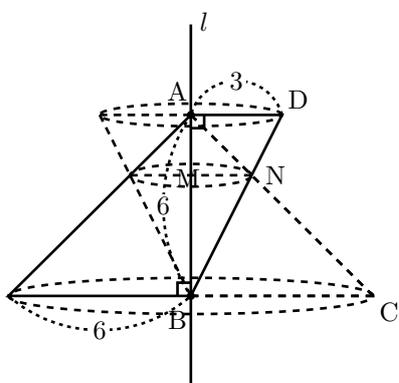
★ 回転体は左右対称くるりんぱ

合同な円すい台 (プリン) の形が上と下にあるのがわかる.

$$\begin{aligned} & \text{上の円すい台の体積} \\ &= 6^2 \times \pi \times 8 \times \frac{1}{3} - 3^2 \times \pi \times 4 \times \frac{1}{3} \\ &= 96\pi - 12\pi = 84\pi \end{aligned}$$

これが 2 つあるので, $84\pi \times 2 = 168\pi$

(2)



★ 回転体は左右対称くるりんぱ

上と下の円すい台 (プリン) に分ける.

まずは AM, MB, MN 長さを求める. (左下図参照)

$$\triangle NDA \sim \triangle NBC$$

この相似比が $3:6 = 1:2$ だから,

高さに対応する AM:MB も $1:2$.

$$AM = AB \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

$$MB = AB \times \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

また, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ から,

相似比 $AM:AB = 1:(1+2) = 1:3$

$$MN = BC \times \frac{1}{3} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

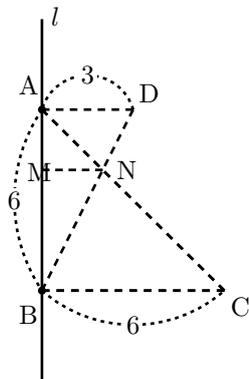
上の円すい台の体積

$$\begin{aligned} &= 3^2 \times \pi \times 6 \times \frac{1}{3} - 2^2 \times \pi \times 4 \times \frac{1}{3} \\ &= 18\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{38}{3}\pi \end{aligned}$$

下の円すい台の体積

$$\begin{aligned} &= 6^2 \times \pi \times 6 \times \frac{1}{3} - 2^2 \times \pi \times 2 \times \frac{1}{3} \\ &= 72\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{208}{3}\pi \end{aligned}$$

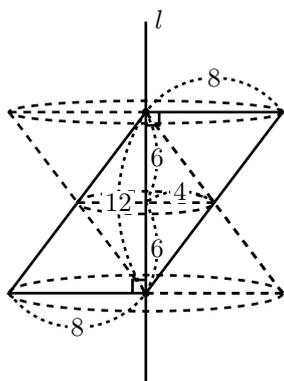
$$\therefore \frac{38}{3}\pi + \frac{208}{3}\pi = 82\pi$$



2. 直線 l を軸として次の線分を 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ. 円周率は π とする.

(S 級 1 分 45 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分 30 秒, C 級 7 分)

(1)

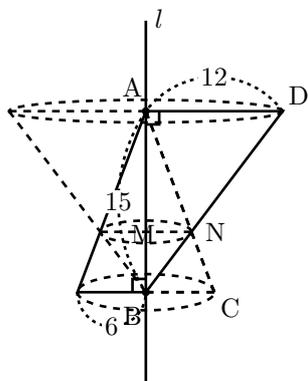


★ 回転体は左右対称くるりんぱ

合同な円すい台 (プリン) の形が上と下にあるのがわかる.

$$\begin{aligned} & \text{上の円すい台の体積} \\ &= 8^2 \times \pi \times 12 \times \frac{1}{3} - 4^2 \times \pi \times 6 \times \frac{1}{3} \\ &= 256\pi - 32\pi \\ &= 224\pi \\ & \text{これが 2 つあるので, } 224\pi \times 2 = 448\pi \end{aligned}$$

(2)



★ 回転体は左右対称くるりんぱ

上と下の円すい台 (プリン) に分ける.

まずは AM, MB, MN 長さを求める. (左下図参照)

$$\triangle NDA \sim \triangle NBC$$

この相似比が $12 : 6 = 2 : 1$ だから,
高さに相当する AM : MB も $2 : 1$.

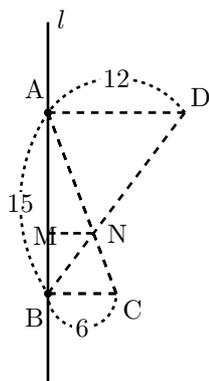
$$AM = AB \times \frac{2}{3} = 15 \times \frac{2}{3} = 10$$

$$MB = AB \times \frac{1}{3} = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

また, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ から,

$$\text{相似比 } AM : AB = 2 : (2 + 1) = 2 : 3$$

$$MN = BC \times \frac{2}{3} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$



上の円すい台の体積

$$\begin{aligned} &= 12^2 \times \pi \times 10 \times \frac{1}{3} - 4^2 \times \pi \times 5 \times \frac{1}{3} \\ &= 720\pi - \frac{80}{3}\pi \\ &= \frac{2080}{3}\pi \end{aligned}$$

下の円すい台の体積

$$\begin{aligned} &= 6^2 \times \pi \times 5 \times \frac{1}{3} - 4^2 \times \pi \times 10 \times \frac{1}{3} \\ &= 180\pi - \frac{160}{3}\pi \\ &= \frac{380}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2080}{3}\pi + \frac{380}{3}\pi = 820\pi$$