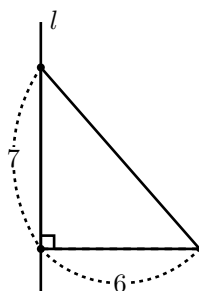


反射テスト 立体図形 回転体 回転体の体積 02

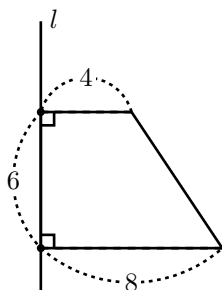
1. 直線 l を軸として次の線分を 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ. 円周率は π とする.

(S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

(1)



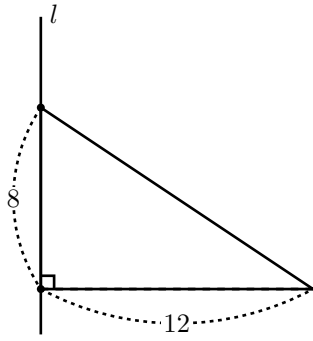
(2)



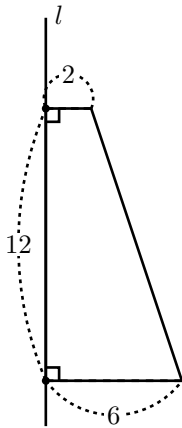
2. 直線 l を軸として次の線分を 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ. 円周率は π とする.

(S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

(1)



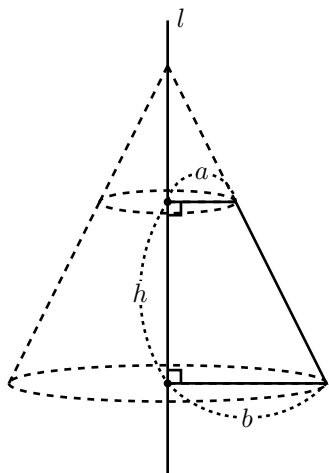
(2)



反射テスト 立体図形 回転体 回転体の体積 02 解答解説

1. 直線 l を軸として次の線分を 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ. 円周率は π とする.

(S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)



★ 台形の回転体は円すい台

左図実線の台形を l を軸として回転したとき, できる立体を円すい台という.

公式 1

★ 円すい台の体積 = 大円すい - 小円すい

これが基本である. 左図のように補助線 (点線) を引いて, 相似を考える. 体積比が相似比の 3 乗であることを使ってもよい.

公式 2

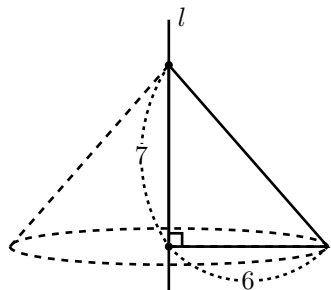
$$\text{★ 円すい台の体積} = \frac{\pi(a^2 + ab + b^2)h}{3}$$

☆是非相似を用いて証明してから使ってほしい. その際,

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

という公式を用いると約分後, 上の式を導ける.

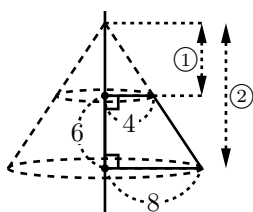
(1)



$$\text{★ 円すいの体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \times \frac{1}{3}$$

$$\therefore \pi \times 6^2 \times 7 \times \frac{1}{3} = 84\pi$$

(2)



★ 相似 大円すいと小円すいのイメージ (左図)

それぞれの高さは相似を用いて求める.

相似比 $4:8 = 1:2 \Rightarrow$ 高さを ①, ② とおける. (左図参照)

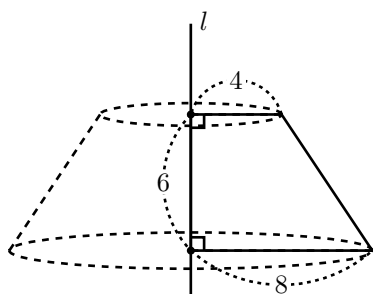
差を考えると $② - ① = 6 \Leftrightarrow ① = 6 \Rightarrow$ 高さは 6, 12

$$\begin{aligned} \text{解法 1} \quad \text{★ 円すい台の体積} &= \text{大円すい} && - && \text{小円すい} \\ &= \pi \times 8^2 \times 12 \times \frac{1}{3} && - && \pi \times 4^2 \times 6 \times \frac{1}{3} \\ &= 256 \times \pi && - && 32 \times \pi && = 224 \times \pi = 224\pi \end{aligned}$$

解法 2 ★ 体積比は相似比の 3 乗

小円すい : 大円すい = $1^3 : 2^3 = 1 : 8 \Rightarrow$ 小円すいの体積は, 大円すいの $\frac{1}{8}$ 倍

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ より, 円すい台の体積は, 大円すいの体積の } \frac{7}{8} \text{ 倍} \quad \therefore \pi \times 8^2 \times 12 \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{8} = 224\pi$$



解法 3 上の公式 2 を用いる.

$$\text{★ 円すい台の体積} = \frac{\pi(a^2 + ab + b^2)h}{3}$$

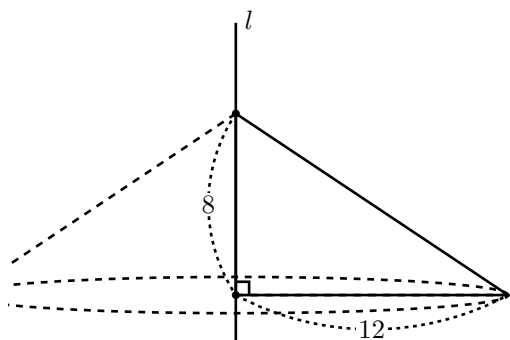
左図の場合, $a = 4, b = 8, h = 6$

$$\therefore \frac{1}{3} \times \pi(4^2 + 4 \times 8 + 8^2) \times 6 = 224\pi$$

2. 直線 l を軸として次の線分を 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ. 円周率は π とする.

(S 級 45 秒, A 級 1 分 20 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

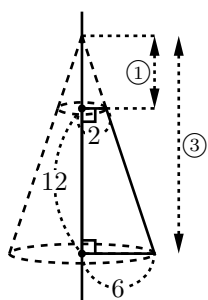
(1)



★ 円すいの体積 = 底面積 \times 高さ $\times \frac{1}{3}$

$$\therefore \pi \times 12^2 \times 8 \times \frac{1}{3} = 384\pi$$

(2)



★ 相似 大円すいと小円すいのイメージ (左図)

それぞれの高さは相似を用いて求める.

相似比 $2:6 = 1:3 \Rightarrow$ 高さを ①, ③ とおける. (左図参照)
 差を考えると $③ - ① = 12 \Leftrightarrow ① = 6 \Rightarrow$ 高さは 6, 18

解法 1 ★ 円すい台の体積 = 大円すい - 小円すい

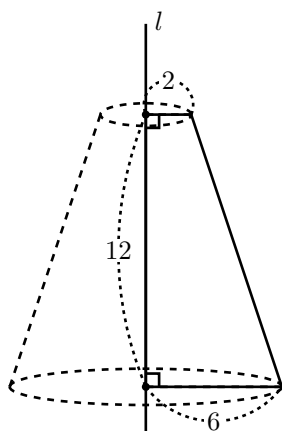
$$\begin{aligned} & \pi \times 6^2 \times 18 \times \frac{1}{3} - \pi \times 2^2 \times 6 \times \frac{1}{3} \\ &= 216 \times \pi - 8 \times \pi = 208 \times \pi = 208\pi \end{aligned}$$

解法 2 ★ 体積比は相似比の 3 乗

小円すい : 大円すい = $1^3 : 3^3 = 1 : 27 \Rightarrow$ 小円すいの体積は, 大円すいの $\frac{1}{27}$ 倍

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$ より, 円すい台の体積は, 大円すいの体積の $\frac{26}{27}$ 倍

$$\therefore \pi \times 6^2 \times 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{26}{27} = 208\pi$$



解法 3 公式 2 を用いる.

★ 円すい台の体積 = $\frac{\pi(a^2 + ab + b^2)h}{3}$

左図の場合, $a = 2, b = 6, h = 12$

$$\therefore \frac{1}{3} \times \pi \times (2^2 + 2 \times 6 + 6^2) \times 12 = 208\pi$$