反射テスト　平面図形　線分比・面積比　応用問題105　02

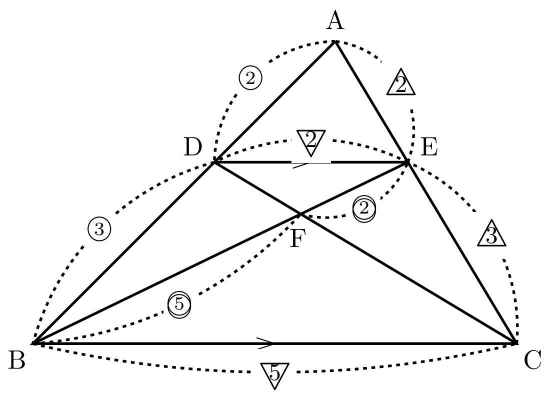
1. △ABC において，点 D は辺 AB 上の点で，2DB = 3AD，点 E は辺 AC 上の点で，DE // BC である．
DC と EB の交点を F としたとき，△FBC は △ABC の面積の何倍か．（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分）

2. $\triangle$ABC において，点 D は辺 AB 上の点で，3DB = 4AD，点 E は辺 AC 上の点で，DE // BC である．
DC と EB の交点を F としたとき，$\triangle$FBC は $\triangle$ABC の面積の何倍か．(S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

反射テスト　平面図形　線分比・面積比　応用問題105　02　解答解説

1. $\triangle$ABC において，点 D は辺 AB 上の点で，2DB = 3AD，点 E は辺 AC 上の点で，DE // BC である．
DC と EB の交点を F としたとき，$\triangle$FBC は $\triangle$ABC の面積の何倍か．(S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

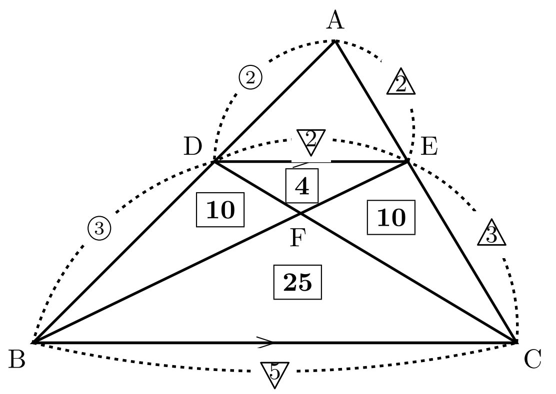
★平行線と線分比
2DB = 3AD　⇔　AD : DB = 2 : 3
DE // BC　⇒　AE : EC = 2 : 3



解法 1　相似比と面積比

$\triangle$ADE ∽ $\triangle$ABC　⇒　DE : BC = 2 : 5
$\triangle$FED ∽ $\triangle$FBC　⇒　EF : FB = 2 : 5

$$\therefore \quad \triangle \mathrm{FBC} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BE}}\triangle \mathrm{EBC} = \frac{5}{7} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{5}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{3}{7}\triangle \mathrm{ABC} \qquad \therefore \ \mathbf{\frac{3}{7}} \textbf{倍}$$



解法 2　台形の面積比
$\triangle$ADE ∽ $\triangle$ABC　⇒　DE : BC = 2 : 5

★台形の面積比
$\triangle$FED : $\triangle$FDB : $\triangle$FBC : $\triangle$FCE
$= 2^2 : 2 \times 5 : 5^2 : 2 \times 5 = \boxed{4} : \boxed{10} : \boxed{25} : \boxed{10}$

$$\triangle \mathrm{ADE} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\triangle \mathrm{EDB} = \frac{2}{3}\left(\boxed{4} + \boxed{10}\right) = \boxed{\frac{28}{3}}$$

$$\triangle \mathrm{ABC} = \boxed{4} + \boxed{10} + \boxed{25} + \boxed{10} + \boxed{\frac{28}{3}} = \boxed{\frac{175}{3}}$$

$$\triangle \mathrm{ABC} \div \triangle \mathrm{BCF} = \boxed{25} \div \boxed{\frac{175}{3}} = \mathbf{\frac{3}{7}} \textbf{倍}$$

解法 3　メネラウスの定理と面積比

★メネラウスの定理

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}} \times \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} \times \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \times \frac{2+3}{3} \times \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = \frac{2}{5}$$

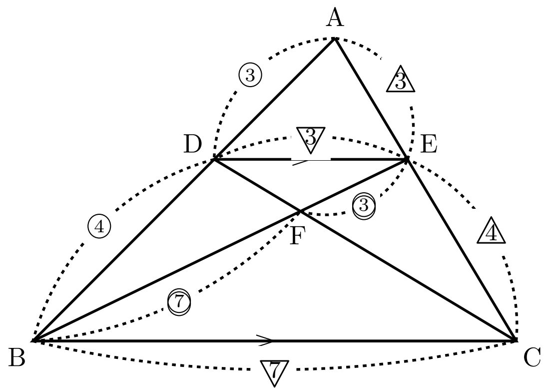
以下は解法 1 と同じ．

2. △ABC において，点 D は辺 AB 上の点で，3DB = 4AD，点 E は辺 AC 上の点で，DE // BC である．DC と EB の交点を F としたとき，△FBC は △ABC の面積の何倍か．(*S* 級 1 分，*A* 級 2 分，*B* 級 3 分 20 秒，*C* 級 5 分)

★平行線と線分比

3DB = 4AD　⇔　AD : DB = 3 : 4

DE // BC　⇒　AE : EC = 3 : 4

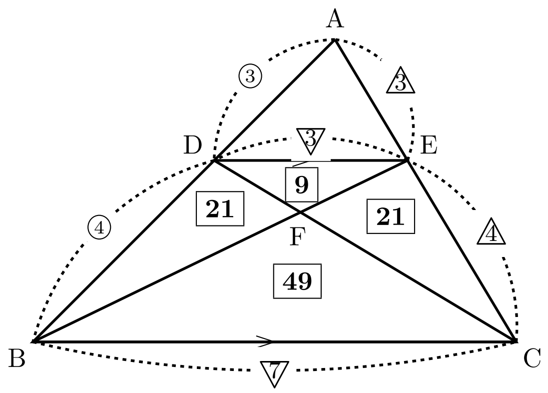


解法 1　相似比と面積比

△ADE ∽ △ABC　⇒　DE : BC = 2 : 5

△FED ∽ △FBC　⇒　EF : FB = 2 : 5

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{FBC} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BE}}\triangle\mathrm{EBC} = \frac{7}{10}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{7}{10}\times\frac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{2}{5}\triangle\mathrm{ABC}\qquad \therefore\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\textbf{倍}$$



解法 2　台形の面積比

△ADE ∽ △ABC　⇒　DE : BC = 3 : 7

★台形の面積比

△FED : △FDB : △FBC : △FCE

$= 3^2 : 3\times 7 : 7^2 : 3\times 7 = \boxed{9} : \boxed{21} : \boxed{49} : \boxed{21}$

$$\triangle\mathrm{ADE} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\triangle\mathrm{EDB} = \frac{3}{4}\left(\boxed{9}+\boxed{21}\right) = \boxed{\tfrac{45}{2}}$$

$$\triangle\mathrm{ABC} = \boxed{9}+\boxed{21}+\boxed{49}+\boxed{21}+\boxed{\tfrac{45}{2}} = \boxed{\tfrac{245}{2}}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}\div\triangle\mathrm{BCF} = \boxed{49}\div\boxed{\tfrac{245}{2}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\textbf{倍}$$

解法 3　メネラウスの定理と面積比

★メネラウスの定理

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}\times\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}\times\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{3}\times\frac{3+4}{4}\times\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = \frac{3}{7}$$

以下は解法 1 と同じ．