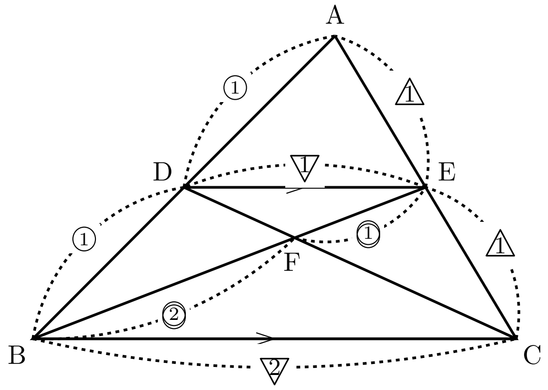
反射テスト　平面図形　線分比・面積比　応用問題105　01

1.　△ABC において，点 D は辺 AB 上の点で，AD = DB，点 E は辺 AC 上の点で，DE // BC である．
DC と EB の交点を F としたとき，△FBC は △ABC の面積の何倍か．（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分）

2. $\triangle$ABC において，点 D は辺 AB 上の点で，AD : DB $= 1 : 2$，点 E は辺 AC 上の点で，DE // BC である．
DC と EB の交点を F としたとき，$\triangle$FBC は $\triangle$ABC の面積の何倍か．(S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

1. △ABC において，点 D は辺 AB 上の点で，AD = DB，点 E は辺 AC 上の点で，DE // BC である．
DC と EB の交点を F としたとき，△FBC は △ABC の面積の何倍か.（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分）

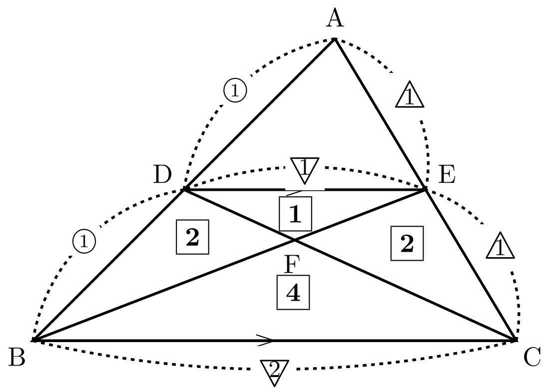
★平行線と線分比
AD : DB = 1 : 1 かつ DE // BC　⇒　AE : EC = 1 : 1



解法 1　相似比と面積比

△ADE ∽ △ABC　⇒　DE : BC = 1 : 2
△FED ∽ △FBC　⇒　EF : FB = 1 : 2

$$\therefore \quad \triangle \mathrm{FBC} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BE}} \triangle \mathrm{EBC}$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}} \triangle \mathrm{ABC}$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{3} \triangle \mathrm{ABC} \qquad \therefore \ \mathbf{\frac{1}{3}}\text{倍}$$



解法 2　台形の面積比
△ADE ∽ △ABC　⇒　DE : BC = 1 : 2

★台形の面積比
△FED : △FDB : △FBC : △FCE
$= 1^2 : 1 \times 2 : 2^2 : 1 \times 2 = \boxed{1} : \boxed{2} : \boxed{4} : \boxed{2}$

$$\triangle \mathrm{ADE} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \triangle \mathrm{EDB} = \frac{1}{1}\left(\boxed{1} + \boxed{2}\right) = \boxed{3}$$

$$\triangle \mathrm{ABC} = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{4} + \boxed{2} + \boxed{3} = \boxed{12}$$

$$\triangle \mathrm{ABC} \div \triangle \mathrm{BCF} = \boxed{4} \div \boxed{12} = \mathbf{\frac{1}{3}}\text{倍}$$

解法 3　メネラウスの定理と面積比

★メネラウスの定理

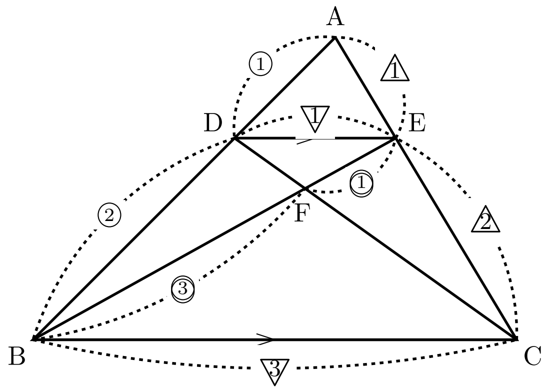
$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}} \times \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} \times \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1} \times \frac{1+1}{1} \times \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = \frac{1}{2}$$

以下は解法 1 と同じ.

2. △ABC において，点 D は辺 AB 上の点で，AD : DB = 1 : 2，点 E は辺 AC 上の点で，DE // BC である．
DC と EB の交点を F としたとき，△FBC は △ABC の面積の何倍か．(S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 20 秒，C 級 5 分)

★平行線と線分比

AD : DB = 1 : 2 かつ DE // BC　⇒　AE : EC = 1 : 2

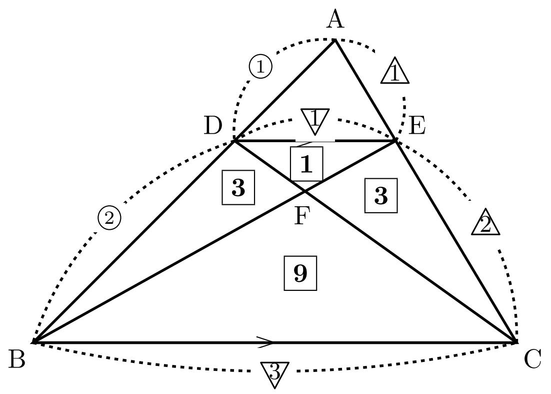


解法 1　相似比と面積比

△ADE ∽ △ABC　⇒　DE : BC = 1 : 3

△FED ∽ △FBC　⇒　EF : FB = 1 : 3

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{FBC} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BE}}\triangle\mathrm{EBC} = \frac{3}{4}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}\qquad \therefore\ \boldsymbol{\frac{1}{2}}\textbf{倍}$$



解法 2　台形の面積比

△ADE ∽ △ABC　⇒　DE : BC = 1 : 3

★台形の面積比

△FED : △FDB : △FBC : △FCE

$= 1^2 : 1\times3 : 3^2 : 1\times3 = \boxed{1} : \boxed{3} : \boxed{9} : \boxed{3}$

$$\triangle\mathrm{ADE} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\triangle\mathrm{EDB} = \frac{1}{2}\left(\boxed{1}+\boxed{3}\right) = \boxed{2}$$

$$\triangle\mathrm{ABC} = \boxed{1}+\boxed{3}+\boxed{9}+\boxed{3}+\boxed{2} = \boxed{18}$$

$$\triangle\mathrm{ABC} \div \triangle\mathrm{BCF} = \boxed{9}\div\boxed{18} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\textbf{倍}$$

解法 3　メネラウスの定理と面積比

★メネラウスの定理

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}}\times\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}}\times\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{1}\times\frac{1+2}{2}\times\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FB}} = \frac{1}{3}$$

以下は解法 1 と同じ．