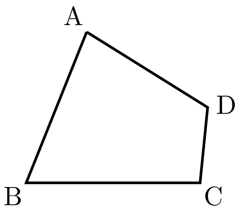
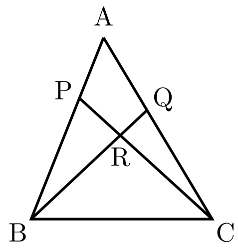
反射テスト　面積　等積変形の逆　02

1.　次の問に答えよ.（ S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

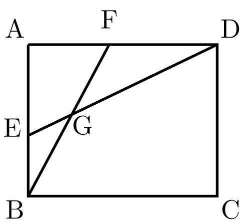
(1)　四角形 ABCD がある.
$\triangle \mathrm{ACD} = \triangle \mathrm{BCD}$, $\angle \mathrm{BAC} = 50^\circ$, $\angle \mathrm{CAD} = 30^\circ$
このとき, $\angle \mathrm{CDA}$ を求めよ.



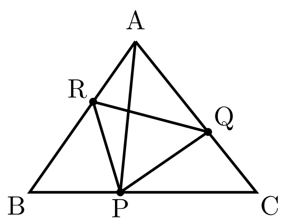
(2)　三角形 ABC がある.
$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 1 : 2$, $\triangle \mathrm{PBR} = \triangle \mathrm{QCR}$
面積比 $\triangle \mathrm{APQ}$: 四角形 PBCQ を求めよ.



(3)　長方形 ABCD がある.
四角形 EBCD = 四角形 FBCD, $\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 3 : 2$
このとき $\mathrm{FG} : \mathrm{GB}$ を求めよ.

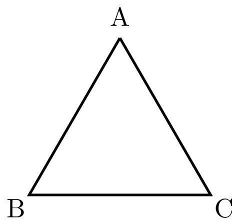


(4)　三角形 ABC がある.
$\triangle \mathrm{ABP}$ = 四角形 BPQR, $\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = 2 : 3$
$\triangle \mathrm{PQR}$ の面積は $\triangle \mathrm{ABC}$ の何倍か.

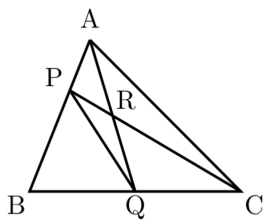


2. 次の問に答えよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

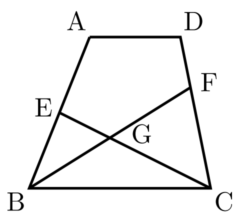
(1) 正三角形 ABC がある.
$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ACD}$, $\angle\mathrm{BAD} = 30^\circ$
D を図示し, $\angle\mathrm{ADB}$ を求めよ.



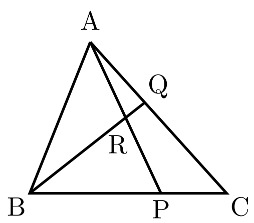
(2) 三角形 ABC がある.
$\triangle\mathrm{ABQ} = \triangle\mathrm{CBP}$, $\mathrm{BQ} = \mathrm{QC}$
$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は $\triangle\mathrm{ABC}$ の何倍か.



(3) $\mathrm{AD} : \mathrm{BC} = 1 : 2$ で $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$ の台形 ABCD がある.
四角形 ABFD = 四角形 AECD, $\mathrm{AE} = \mathrm{EB}$
$\triangle\mathrm{GBC}$ の面積は台形の何倍か.

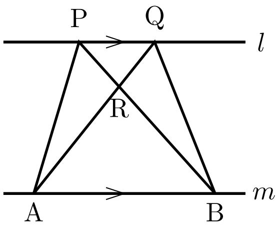


(4) 三角形 ABC がある.
$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = 2 : 1$, $\triangle\mathrm{ABR}$ = 四角形 QRPC
$\mathrm{AR} : \mathrm{RP}$ を求めよ.



反射テスト　面積　等積変形の逆　02　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

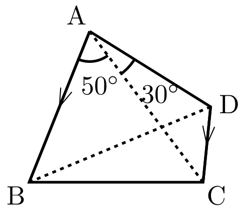


★ 平行⇔等積変形

$$\boldsymbol{l \parallel m} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ① \quad \triangle\mathbf{PAB} = \triangle\mathbf{QAB} & \because \text{底辺, 高さが等しい} \\ ② \quad \triangle\mathbf{PAR} = \triangle\mathbf{QBR}\ \text{(蝶々の形)} & \because ①\ \text{の両辺} - \triangle\mathbf{RAB} \end{cases}$$

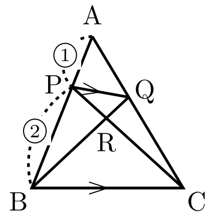
☆蝶々を上下に挟む線が平行

(1)　四角形 ABCD がある.
$\triangle$ACD $=$ $\triangle$BCD, $\angle$BAC $= 50°$, $\angle$CAD $= 30°$
このとき, $\angle$CDA を求めよ.



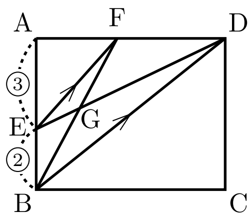
★等積変形①　$\triangle$ACD $=$ $\triangle$BCD ⇔ AB // CD
錯角より　$\angle$ACD $=$ $\angle$BAC $= 50°$
$\triangle$ACD から　$\angle$CDA $= 180 - (50 + 30) =$ **100°**

(2)　三角形 ABC がある.
AP : PB $= 1 : 2$, $\triangle$PBR $=$ $\triangle$QCR
面積比 $\triangle$APQ : 四角形 PBCQ を求めよ.



★等積変形②　$\triangle$PBR $=$ $\triangle$QCR ⇔ PQ // BC
(蝶々を上下に挟む線が平行)
AP : PB $= 1 : 2$　⇒　AQ : QC $= 1 : 2$
$\triangle\mathrm{APQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{9}\triangle\mathrm{ABC}$
$\triangle$APQ : 四角形 PBCQ $= \frac{1}{9} : \left(1 - \frac{1}{9}\right) =$ **1 : 8**

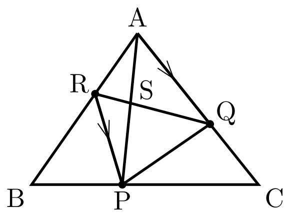
(3)　長方形 ABCD がある.
四角形 EBCD $=$ 四角形 FBCD, AE : EB $= 3 : 2$
このとき FG : GB を求めよ.



★共通部分を引く！
　四角形 EBCD $=$ 四角形 FBCD
⇒　EBCD $-$ GBCD $=$ FBCD $-$ GBCD
⇒　$\triangle$EBG $=$ $\triangle$FDG
★等積変形②　$\triangle$EBG $=$ $\triangle$FDG ⇔ EF // BD
AE : EB $= 3 : 2$　⇒　AF : FD $= 3 : 2$
四角形 EBDF は台形で, 平行な EF と BD の比は 3 : 5
よって, $\triangle$GEF ∽ $\triangle$GDB で相似比 3 : 5
⇒　FG : GB $=$ **3 : 5**

☆別解　メネラウスの定理から,
$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}\cdot\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GB}} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GB}} = 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{GB}} = \frac{3}{5}$

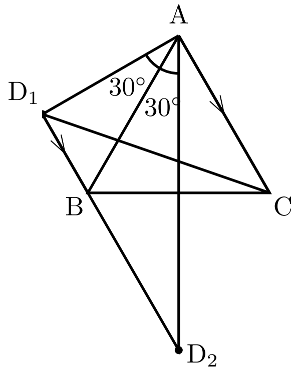
(4)　三角形 ABC がある.
$\triangle$ABP $=$ 四角形 BPQR, BP : PC $= 2 : 3$
$\triangle$PQR の面積は $\triangle$ABC の何倍か.



★共通部分を引く！
　$\triangle$ABP $=$ 四角形 BPQR
⇒　$\triangle$ABP $-$ BPSR $=$ 四角形 BPQR $-$ BPSR
⇒　$\triangle$SAR $=$ $\triangle$SQP
★等積変形②　$\triangle$SAR $=$ $\triangle$SQP ⇔ AQ // RP
(蝶々を上下に挟む線が平行)
BP : PC $= 2 : 3$　⇒　AR : RB $= 3 : 2$
★等積変形①　AQ // RP ⇔ $\triangle$ARP $=$ $\triangle$QRP
$\triangle\mathrm{PQR} = \triangle\mathrm{ARP} = \frac{3}{5}\triangle\mathrm{ABP} = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\triangle\mathrm{ABC}$
$= \frac{6}{25}\triangle\mathrm{ABC}$　⇒　$\boldsymbol{\frac{6}{25}}$ **倍**

2. 次の問に答えよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

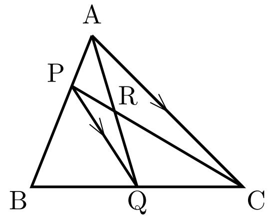
(1) 正三角形 ABC がある.
$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{ACD}$, $\angle \mathrm{BAD} = 30°$
D を図示し, $\angle \mathrm{ADB}$ を求めよ.



★等積変形① $\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{ACD} \Leftrightarrow \mathrm{AC} \parallel \mathrm{BD}$
$\angle \mathrm{BAD} = 30°$とあるが, 点 D は AB の左か右かわからない
.
上の D_1 と D_2のように D は 2 つの可能性がある.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\angle \mathrm{AD_1B} = 90°} \\ \boldsymbol{\angle \mathrm{AD_2B} = 30°} \end{cases}$$

(2) 三角形 ABC がある.
$\triangle \mathrm{ABQ} = \triangle \mathrm{CBP}$, $\mathrm{BQ} = \mathrm{QC}$
$\triangle \mathrm{PQR}$ の面積は $\triangle \mathrm{ABC}$ の何倍か.

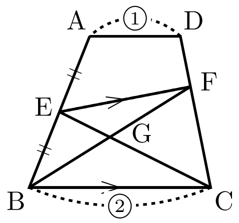


★共通部分を引く！
$\triangle \mathrm{ABQ} = \triangle \mathrm{CBP}$
$\Rightarrow$ $\triangle \mathrm{ABQ} - \mathrm{BQRP} = \triangle \mathrm{CBP} - \mathrm{BQRP}$
$\Rightarrow$ $\triangle \mathrm{PAR} = \triangle \mathrm{QCR}$
★等積変形② $\triangle \mathrm{PAR} = \triangle \mathrm{QCR} \Leftrightarrow \mathrm{PQ} \parallel \mathrm{AC}$
(蝶々を上下に挟む線が平行)

$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = 1 : 1 \Rightarrow \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 1 : 1 \Rightarrow \mathrm{PQ} : \mathrm{AC} = 1 : 2$
台形 PQCA に注目して, $\mathrm{PR} : \mathrm{RC} = 1 : 2$

$\triangle \mathrm{PQR} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{12}\triangle \mathrm{ABC} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{12}}$**倍**

(3) $\mathrm{AD} : \mathrm{BC} = 1 : 2$ で $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$ の台形 ABCD がある.
四角形 ABFD = 四角形 AECD, AE = EB
$\triangle \mathrm{GBC}$ の面積は台形の何倍か.

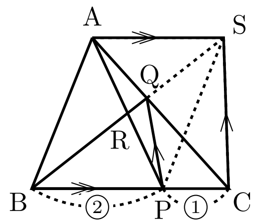


★共通部分を引く！
四角形 ABFD = 四角形 AECD
$\Rightarrow$ ABFD − AEGFD = AECD − AEGFD
$\Rightarrow$ $\triangle \mathrm{EBG} = \triangle \mathrm{FCG}$
★等積変形② $\triangle \mathrm{EBG} = \triangle \mathrm{FCG} \Leftrightarrow \mathrm{EF} \parallel \mathrm{BC}$
(蝶々を上下に挟む線が平行)

$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = 1 : 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{DF} : \mathrm{FC} = 1 : 1$
EF は①と②の平均で, ①.5四角形 EBCF は台形で, 平行な EF と BC の比は $1.5 : 2 = 3 : 4$
よって, $\triangle \mathrm{GEF} \backsim \triangle \mathrm{GCB}$ で相似比 $3 : 4$

$\triangle \mathrm{GBC} = \frac{4}{7}\triangle \mathrm{EBC} = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$台形 ABCD
$= \frac{4}{21}$台形 ABCD $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{4}{21}}$**倍**

(4) 三角形 ABC がある.
$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = 2 : 1$, $\triangle \mathrm{ABR}$ = 四角形 QRPC
AR : RP を求めよ.



★等積変形① $\mathrm{PQ} \parallel \mathrm{CS}$
$\Rightarrow$ $\triangle \mathrm{CPQ} = \triangle \mathrm{SPQ} \Leftrightarrow \mathrm{QRPC} = \triangle \mathrm{SRP}$
★等積変形② $\triangle \mathrm{ABR} = \mathrm{QRPC} = \triangle \mathrm{SRP}$
$\Leftrightarrow$ AS $/\!\!/\!\!=$ BC

$\therefore$ $\mathrm{AQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{SQ} : \mathrm{QB} = \mathrm{CP} : \mathrm{PB} = 1 : 2$
$\Rightarrow$ $\mathrm{AS} : \mathrm{BC} = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{AS} : \mathrm{BP} = 1 : 2 \cdot \frac{2}{3} = 3 : 4$
$\Rightarrow$ AR : RP = **3 : 4**

☆別解 メネラウスの定理より,
$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RA}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RA}} = 1$
$\therefore$ $\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RA}} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{AR} : \mathrm{RP} = 3 : 4$