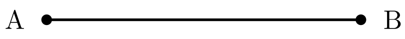
反射テスト　動点　軌跡・領域　円周角の定理の逆　02

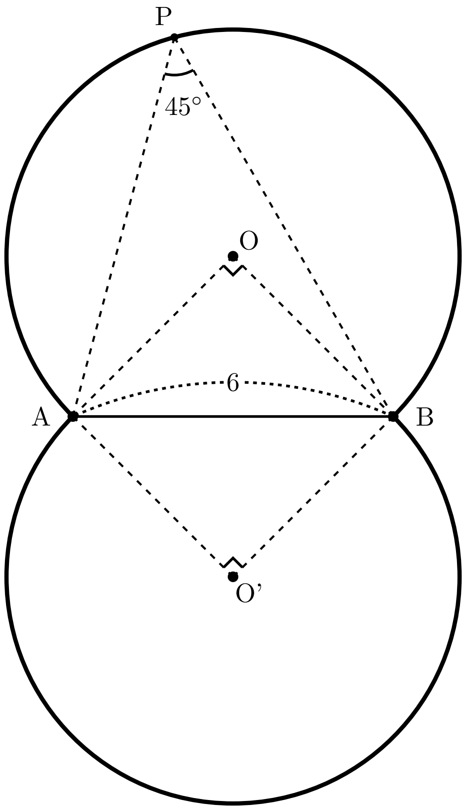
1.　平面上に 2 定点 A, B があり，線分 $\mathrm{AB}=6$ とする．この平面上に動点 P があって，常に$\angle\ \mathrm{APB} \geqq 45°$ を保ったまま動くものとする．このとき，この点 P の動ける範囲の面積を求めよ．（ S 級 50 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）

2.　平面上に 2 定点 A, B があり，線分 $\mathrm{AB} = 12$ とする．この平面上に動点 P があって，常に$\angle\ \mathrm{APB} \geqq 120^\circ$ を保ったまま動くものとする．このとき，この点 P の動ける範囲の面積を求めよ．　　　（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）



反射テスト　動点　軌跡・領域　円周角の定理の逆　02　解答解説

1.　平面上に 2 定点 A, B があり，線分 AB $= 6$ とする．この平面上に動点 P があって，常に∠ APB $\geqq 45°$ を保ったまま動くものとする．このとき，この点 P の動ける範囲の面積を求めよ．（ S 級 50 秒，A 級 2 分，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）



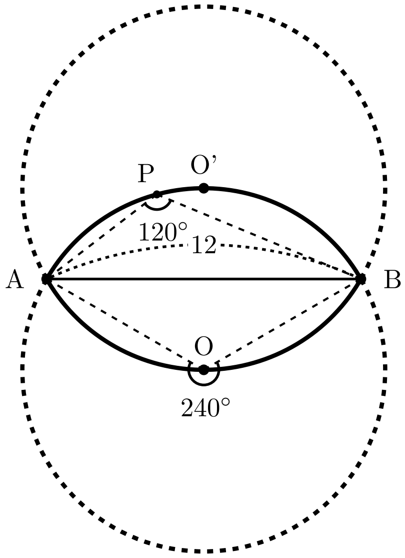
下記の反射テストをまだしたことがなければ，先にした方がよい．
動点軌跡領域円周角の定理の逆 01

★ 領域
ある条件下で動点が動ける範囲を領域という．
★ 軌跡
ある条件下で動点が動いて作る線を軌跡という．
「動いたあと」という表現をすることが多い．
★ 一定の角度を保つ軌跡
∠ APB $= 45°$ を満たす動点 P の動きは，
円周角の定理の逆から，円運動 (左図太線) になる．
この問題では∠ APB が $45°$ 以上なので，
この軌跡の内部が点 P の動ける範囲である．(左図の **太線内部**)

線分 AB は円の弦 AB であり，
円周角 APB $= 45°$ から 中心角 AOB $= 90°$.
△ OAB は直角二等辺三角形.
$$360° - 90° = 270° \qquad \frac{270°}{360°} = \frac{3}{4}$$
よって，左図のように 3/4 の **円弧** が上下に描ける．

直角二等辺三角形 OAB の三辺比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ だから，
$$\mathrm{OA} = 6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$
上下対称であるから，領域の面積は，
$$2\,(3/4\text{ 円} + \text{直角二等辺三角形 OAB})$$
$$= 2\left\{\pi \times \left(3\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2}\right\}$$
$$= 2\left(\frac{27}{2}\pi + 9\right) = \boldsymbol{27\,\pi + 18}$$

2. 平面上に 2 定点 A, B があり，線分 AB $= 12$ とする．この平面上に動点 P があって，常に$\angle$ APB $\geqq 120^\circ$ を保ったまま動くものとする．このとき，この点 P の動ける範囲の面積を求めよ．（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）



★ 領域

ある条件下で動点が動ける範囲を領域という．

★ 軌跡

ある条件下で動点が動いて作る線を軌跡という．

「動いたあと」という表現をすることが多い．

★ 一定の角度を保つ軌跡

$\angle$ APB $= 120^\circ$ を満たす動点 P の動きは，

円周角の定理の逆から，円運動 (左図太線) になる．

この問題では$\angle$ APB が 120° 以上なので，

この軌跡の内部が点 P の動ける範囲である．(左図の **太線内部**)

線分 AB は円の弦 AB であり，

円周角 APB $= 120^\circ$ から 中心角 AOB $= 240^\circ$．

$$360^\circ - 240^\circ = 120^\circ \qquad \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$$

よって，左図のように 1/3 の **円弧** が上下に描ける．

この条件下だと，$\triangle$ AOO$'$, $\triangle$ BOO$'$が共に正三角形になり，

上下の円弧の中心が，互いの円弧上にある．

二等辺三角形 OAB について考える．

O から AB に垂線を下ろすと，

三辺比 $1 : \sqrt{3} : 2$ の直角三角形が左右にできるから，

$$\mathrm{OA} = 6 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

底辺を AB とする二等辺三角形 OAB の高さ $= 6 \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

上下対称であるから，領域の面積は，

$2\,(1/3$ 円 $-$ 二等辺三角形 OAB$)$

$$= 2\left\{\pi \times \left(4\sqrt{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} - \frac{12 \times 2\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$= 2\left(16\pi - 12\sqrt{3}\right) = \boldsymbol{32\,\pi - 24\sqrt{3}}$$