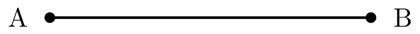
反射テスト　動点　軌跡・領域　円周角の定理の逆　01

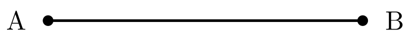
1. 　平面上に 2 定点 A, B があり，線分 $\mathrm{AB} = 12$ とする．この平面上に動点 P があって，常に$\angle\ \mathrm{APB} = 45^\circ$ を保ったまま動くものとする．このとき，この点 P の動いたあとを下図に描き，その動ける距離を求めよ．

（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）



2. 平面上に 2 定点 A, B があり，線分 $\mathrm{AB} = 6$ とする．この平面上に動点 P があって，常に$\angle\ \mathrm{APB} = 120^\circ$ を保ったまま動くものとする．このとき，この点 P の動いたあとを下図に描き，その動ける距離を求めよ．

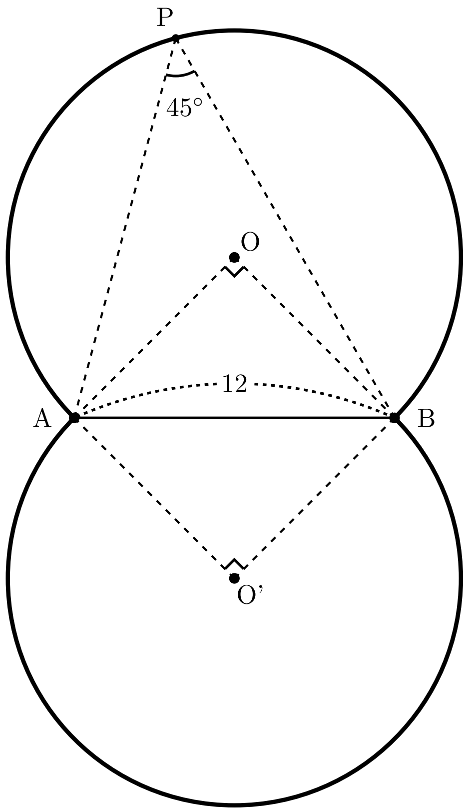
（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）



反射テスト　動点　軌跡・領域　円周角の定理の逆　01　解答解説

1.　平面上に 2 定点 A, B があり，線分 $AB = 12$ とする．この平面上に動点 P があって，常に $\angle$ APB $= 45°$ を保ったまま動くものとする．このとき，この点 P の動いたあとを下図に描き，その動ける距離を求めよ．

（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）



動いたあとは左図の **太線**.

★ 軌跡

ある条件下で動点が動いて作る線を軌跡という．

「動いたあと」という表現をすることが多い．

★ 一定の角度を保つ軌跡

円周角の定理の逆から，これは円運動になる．

この問題では $\angle$ APB が一定ということで，

線分 AB は円の弦 AB であり，

円周角 APB $= 45°$ から 中心角 AOB $= 90°$.

△ OAB は直角二等辺三角形．

$$360° - 90° = 270° \qquad \frac{270°}{360°} = \frac{3}{4}$$

よって，左図のように 3/4 の **円弧** が上下に描ける．

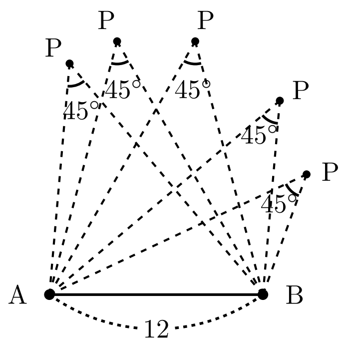
上だけでなく，下の円弧を忘れないように．

直角二等辺三角形 OAB の三辺比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ だから，

$$OA = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

よって，円弧の長さは，

$$2\pi \times 6\sqrt{2} \times \frac{3}{4} \times 2 = \boldsymbol{18\sqrt{2}\,\pi}$$



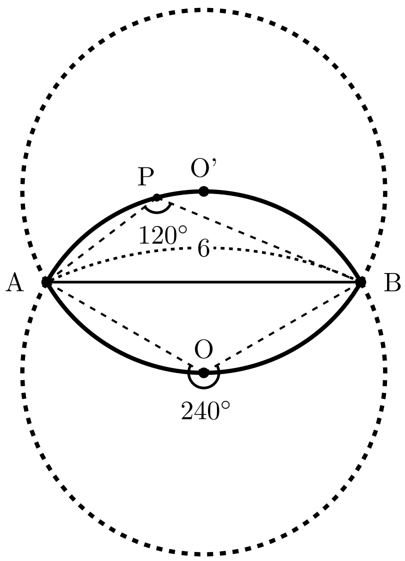
★ 具体例で考える

円弧のイメージは具体例を考えることでも得られる．

左図のように，いくつか **具体例** を描いて，点 P の動きを考えるとよい．

2. 平面上に 2 定点 A, B があり，線分 AB $= 6$ とする．この平面上に動点 P があって，常に$\angle$ APB $= 120°$ を保ったまま動くものとする．このとき，この点 P の動いたあとを下図に描き，その動ける距離を求めよ．

（ S 級 1 分，A 級 2 分，B 級 3 分 40 秒，C 級 5 分 ）



動いたあとは左図の **太線**.

★ 軌跡

ある条件下で動点が動いて作る線を軌跡という．

「動いたあと」という表現をすることが多い．

★ 一定の角度を保つ軌跡

円周角の定理の逆から，これは円運動になる．

この問題では$\angle$ APB が一定ということで，

線分 AB は円の弦 AB であり，

円周角 APB $= 120°$ から 中心角 AOB $= 240°$.

$$360° - 240° = 120° \qquad \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$$

よって，左図のように 1/3 の **円弧** が上下に描ける．

この条件下だと，$\triangle$ AOO$'$, $\triangle$ BOO$'$が共に正三角形になり，

上下の円弧の中心が，互いの円弧上にある．

二等辺三角形 OAB について考える．

O から AB に垂線を下ろすと，

三辺比 $1 : \sqrt{3} : 2$ の直角三角形が左右にできるから，

$$\mathrm{OA} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

よって，円弧の長さは，

$$2\pi \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \boldsymbol{\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi}$$