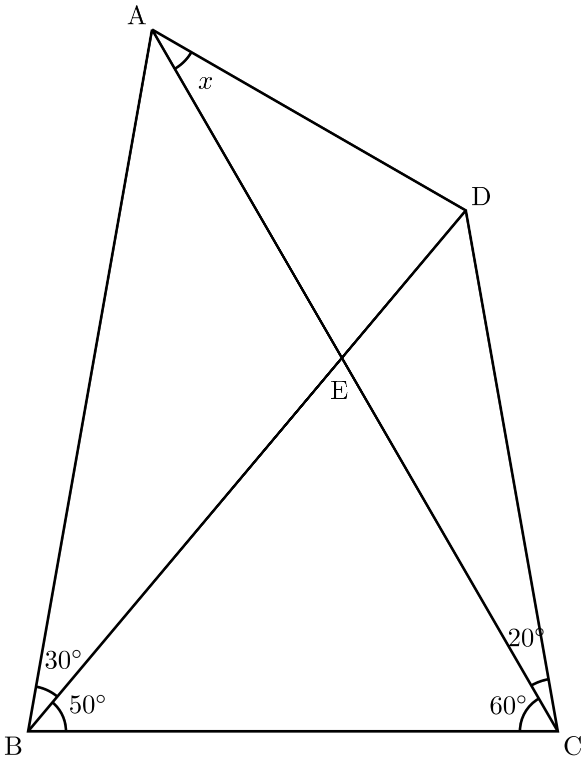
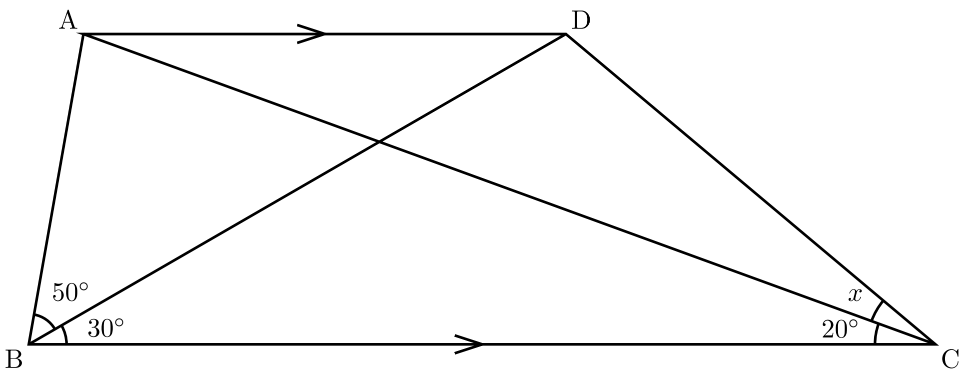
反射テスト　角度　対称性　難難　03

1.　$\angle x$ を求めよ.（ S 級 4 分, A 級 20 分, B 級？分, C 級？分 ）



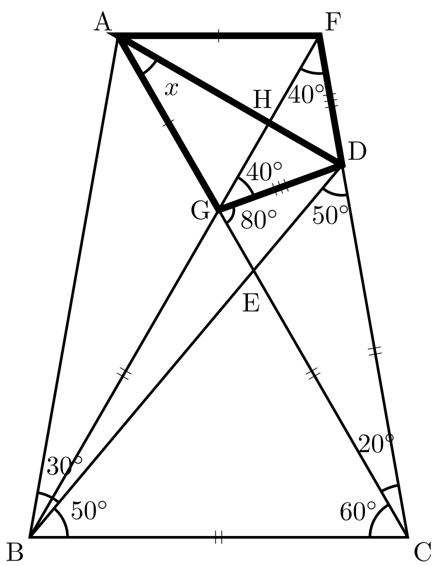
2. AD // BC である．$\angle x$ を求めよ．(S 級 5 分，A 級 30 分，B 級？分，C 級？分)



反射テスト　角度　対称性　難難　03　解答解説

1.　$\angle x$ を求めよ.（ S 級 4 分, A 級 20 分, B 級？分, C 級？分 ）

★ 難しい図形問題ですべきこと.
① 等辺記号, 平行記号（長さや角度など, わかっていること, わかったこと）などを書き入れる.
② 補助線を引く. 平行線や対角線, 垂線などを引こう. …**「図形の基本は三角形」**
★ 図形の対称性　ここに取り上げた問題は **合同・相似を作ること** がテーマである.
・点対称な図形や和が 180° になる角があるときは **回転** 移動の補助線.
・線対称な図形や折った図形があるときは **軸** の補助線.
同じものはどこか. **なければそれを作る** 発想が重要である.



★対称性による補助線
同じものを作る！　⇒　等脚台形 ABCF

△GFA が正三角形になる.　→等辺記号 1　…①
△GBC が正三角形になる.　→等辺記号 2

△CDB に注目すると,　$\angle \mathrm{CDB} = 180 - (50 + 80) = 50°$
　△CDB は二等辺三角形　⇒　BC = CD　→等辺記号 2

△CDG は,　CD = CG だから, 二等辺三角形.
　⇒　$\angle \mathrm{CDG} = \angle \mathrm{CGD} = (180 - 20) \div 2 = 80°$

△FBC に注目すると,　$\angle \mathrm{CFB} == 180 - (60 + 80) = 40°$
また,　$\angle \mathrm{DGF} = 180 - (60 + 80) = 40°$
∴　△DFG は二等辺三角形　⇒　DF = DG　→等辺記号 3　…②

①と②から, △AGD と △AFD は 3 辺がそれぞれ等しい.
　⇒　この 2 つ（図の太線）は合同だから,　$\angle \mathrm{GAH} = \angle \mathrm{FAH}$

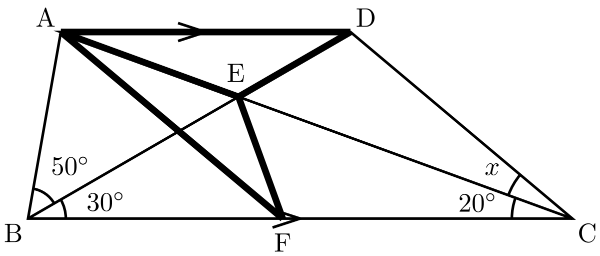
　△AGF は正三角形だから,　$\angle x = 60 \div 2 = \mathbf{30°}$　**…答え**

☆「フランクリンの凧」と呼ばれる有名な問題である.
別解 1（略解）　辺 BA と辺 CD の延長線の交点を E として, 二等辺三角形 EBC について考える.

別解 2（略解）「対称性難 06」の 2 の問題の解法参照.
$\angle \mathrm{BCH} = 20°$となる点 H を辺 AB 上にとると △CDH が正三角形になることを用いる.

2. AD // BC である．$\angle x$ を求めよ．(S 級 5 分, A 級 30 分, B 級？分, C 級？分)

★ 難しい図形問題ですべきこと．
① 等辺記号，平行記号（長さや角度など，わかっていること，わかったこと）などを書き入れる．
② 補助線を引く．平行線や対角線，垂線などを引こう．…**「図形の基本は三角形」**
★ 図形の対称性　ここに取り上げた問題は **合同・相似を作ること** がテーマである．
・点対称な図形や和が 180° になる角があるときは **回転** 移動の補助線．
・線対称な図形や折った図形があるときは **軸** の補助線．
同じものはどこか．**なければそれを作る** 発想が重要である．



★ 対称性による補助線　線対称な図形を作る！　**線対称は軸！**

△CAB が，20°，80°，80°の二等辺三角形になっているので，前ページの「フランクリンの凧」のイメージと重なる．

$\angle$BAF = 60° となるような点 F を辺 BC 上にとる．
$\angle$FAE = 80 − 60 = 20°　となるので，前ページの「フランクリンの凧」から　$\angle$AFE = 30°

AD // BC より，　$\angle$DAE = 20°　かつ　$\angle$ADE = 30°

△AFE と △ADE は AE が共通であるから，上の 2 つの角度の一致より，
この 2 つの三角形（上図太線）は合同である．　←★合同条件：1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい
よって，　AF = AD　…①

また　$\angle$FCA = $\angle$FAC = 20°　から，△FCA は二等辺三角形である．　∴ AF = FC　…②

①と②から AD = FC．また仮定から AD // FC．
1 組の辺が平行かつ等しいので，四角形 AFCD は平行四辺形．
しかも AD = AF であるから，四角形 AFCD はひし形である．

∴　△DAC は二等辺三角形となって，　$\angle x = \angle \mathrm{DAE} = \mathbf{20°}$　**…答え**

☆別解（略解）
三角比を用いて △DAC が二等辺三角形であることを証明しよう．

$$\mathrm{AB}=1 \quad \text{とおくと，} \begin{cases} \triangle \mathrm{ABD}\ \text{に正弦定理を用いて} \quad \mathrm{AD}=\dfrac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} \\ \triangle \mathrm{ABC}\ \text{に正弦定理を用いて} \quad \mathrm{BC}=\dfrac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} \end{cases}$$

∴　△DAC に余弦定理を用いて　$\mathrm{CD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AC}\cos 20^\circ$
この後も式の変換は簡単ではない．CD の値が AD と等しくならないのであれば，数 2B の「三角関数の式のまとめ 01」参照．