反射テスト　平面図形　知識　台形と平均　1001

1.　DA // BC である台形 ABCD があり，上底 DA $= a$，下底 BC $= b$，かつ $a < b$ とする．また，MN が上底・下底に平行になるように，辺 AB, CD 上にそれぞれ M, N を考える．次の条件のとき，MN の長さを a, b で表せ．

（ S 級 15 秒，A 級 1 分 12 秒，B 級 4 分，C 級 7 分 ）

（1）　M, N がそれぞれ AB, CD の中点であるとき．

（2）　MN 上に，対角線 AC, BD の交点があるとき．

2. DA // BC である台形 ABCD があり，上底 DA $= a$，下底 BC $= b$，かつ $a < b$ とする．また，MN が上底・下底に平行になるように，辺 AB, CD 上にそれぞれ M, N を考える．次の条件のとき，MN の長さを a, b で表せ．

（ S 級 15 秒，A 級 1 分 50 秒，B 級 4 分，C 級 7 分 ）

（1） 四角形 AMND と四角形 MBCN が相似であるとき．

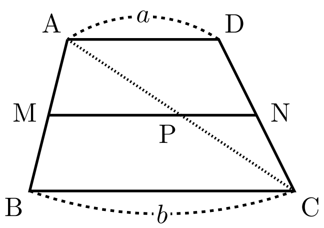
（2） MN で台形 ABCD の面積が 2 等分されるとき．

反射テスト　平面図形　知識　台形と平均　1001　解答解説

1.　DA // BC である台形 ABCD があり，上底 DA $= a$，下底 BC $= b$，かつ $a < b$ とする．また，MN が上底・下底に平行になるように，辺 AB, CD 上にそれぞれ M, N を考える．次の条件のとき，MN の長さを a, b で表せ．

（ S 級 15 秒，A 級 1 分 12 秒，B 級 4 分，C 級 7 分 ）

(1)　M, N がそれぞれ AB, CD の中点であるとき．



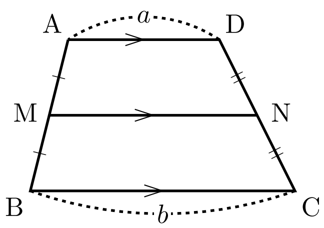
△ABC に中点連結定理を適用して，

$\mathrm{MP} = \dfrac{b}{2}$

△CDA に中点連結定理を適用して，

$\mathrm{NP} = \dfrac{a}{2}$

$\therefore \quad \mathrm{MN} = \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{2} = \boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}}$



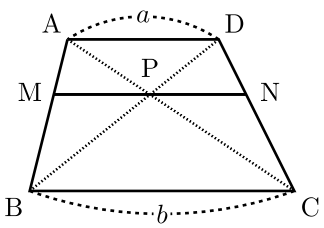
★ 台形と相加平均 (*Arithmetic mean*)

左図の条件のとき，

MN の長さは，

上底 a と下底 b の **相加平均** $\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}}$

(2)　MN 上に，対角線 AC, BD の交点があるとき．



△PDA ∽ △PBC より，PD : PB $= a : b$

△DPN ∽ △DBC より，

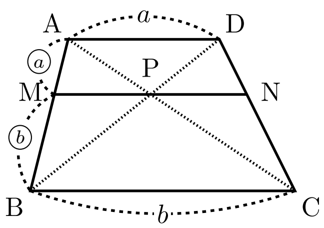
$\mathrm{PN} = \dfrac{a}{a+b} \times \mathrm{BC}$

$= \dfrac{ab}{a+b}$

MP も同様にして，$\dfrac{ab}{a+b}$

$\therefore\ \mathrm{MN} = \dfrac{ab}{a+b} \times 2 = \boldsymbol{\dfrac{2ab}{a+b}}$

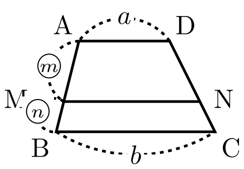
★ 台形と調和平均 (*Harmonic mean*)



左図の条件のとき，

MN の長さは，

上底 a と下底 b の **調和平均** $\boldsymbol{\dfrac{2ab}{a+b}}$



★ 台形と加重平均 (*weighted average*) …☆内分点公式と同値

(1) と (2) を一般化しよう．左図のように平行線の距離の比が $m : n$ のとき，

MN の長さは，**加重平均** $\boldsymbol{\dfrac{na+mb}{m+n}}$

★ 加重平均

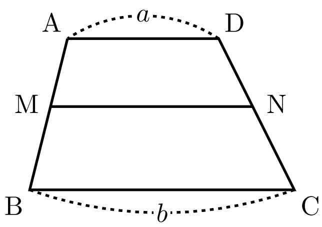
グループ A, B の平均値がそれぞれ a, b，グループ A, B の度数 (人数・個数) 比が $m : n$ のとき，

グループ A, B を混ぜた全体の平均値は $\dfrac{ma+nb}{m+n}$ となる．長さのときと違って m と n が逆になることに注意．

2. DA // BC である台形 ABCD があり，上底 DA $= a$，下底 BC $= b$，かつ $a < b$ とする．また，MN が上底・下底に平行になるように，辺 AB, CD 上にそれぞれ M, N を考える．次の条件のとき，MN の長さを a, b で表せ．

（ S 級 15 秒，A 級 1 分 50 秒，B 級 4 分，C 級 7 分 ）

(1) 四角形 AMND と四角形 MBCN が相似であるとき．



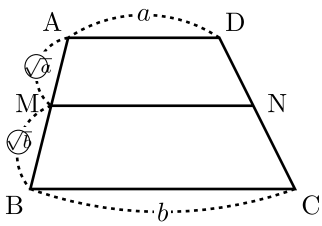
四角形 AMND ∽四角形 MBCN であるから，

DAMN = NM : BC

$\Rightarrow$ a : MN = MN : b

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{MN}^2 = ab$

a, b は正であるから， $\mathrm{MN} = \boldsymbol{\sqrt{ab}}$



★ 台形と相乗平均 (*Geometric mean*)

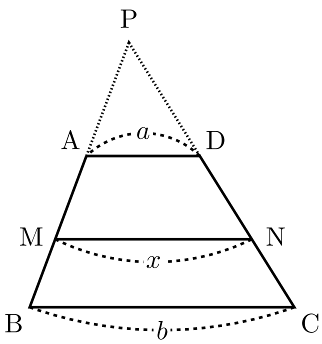
左図で上と下の台形が相似のとき，

MN の長さは，

上底 a と下底 b の **相乗平均** $\boldsymbol{\sqrt{ab}}$

ちなみに，AM : MB $= \sqrt{a} : \sqrt{b}$

(2) MN で台形 ABCD の面積が 2 等分されるとき．



MN の長さを x とする．($x > 0$)

△PAD ∽ △PMN ∽ △PBC

相似比が $a : x : b$ $\Rightarrow$ 面積比が $a^2 : x^2 : b^2$

台形 AMND = 台形 MBCN より，

$$x^2 - a^2 = b^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \boldsymbol{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}$$

☆別解 台形 ABCD の高さを 1，台形 AMND の高さを h とする．

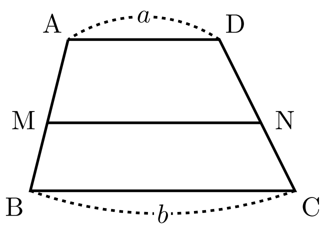
台形 AMND = 台形 MBCN $= \dfrac{1}{2}$ 台形 ABCD

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+x)h}{2} = \frac{(b+x)(1-h)}{2} = \frac{a+b}{4}$$

ここから，x を消去して，h について整理すれば，

$$2(a-b)h^2 - 4ah + a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{2a \pm \sqrt{2a^2 + 2b^2}}{2(a-b)}$$

$0 < h < 1$ より，$h = \dfrac{2a - \sqrt{2a^2 + 2b^2}}{2(a-b)}$ $\quad \therefore\ x = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}}$



★ 台形と 2 乗平均平方根 (*Root − mean Square* ; *RMS*)

左図で上と下の台形の面積が等しいとき，

MN の長さは，

上底 a と下底 b の **2 乗平均平方根 (*RMS*)** $\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}}$

☆ *RMS* (*Root − mean Square*)

電磁場の 2 乗で定義される光の強度の平均をとる場合など，

物理や電気工学などでしばしば用いられる．