反射テスト　平面図形　知識　台形と平均　1001

1.　DA // BC である台形 ABCD があり, 上底 DA $= a$, 下底 BC $= b$, かつ $a < b$ とする. また, MN が上底・下底に平行になるように, 辺 AB, CD 上にそれぞれ M, N を考える. 次の条件のとき, MN の長さを a, b で表せ.

（ S 級 15 秒, A 級 1 分 12 秒, B 級 4 分, C 級 7 分 ）

(1)　M, N がそれぞれ AB, CD の中点であるとき.

(2)　MN 上に, 対角線 AC, BD の交点があるとき.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. DA // BC である台形 ABCD があり, 上底 DA $= a$, 下底 BC $= b$, かつ $a < b$ とする. また, MN が上底・下底に平行になるように, 辺 AB, CD 上にそれぞれ M, N を考える. 次の条件のとき, MN の長さを a, b で表せ.

（ S 級 15 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 7 分 ）

(1) 四角形 AMND と四角形 MBCN が相似であるとき.

(2) MN で台形 ABCD の面積が 2 等分されるとき.

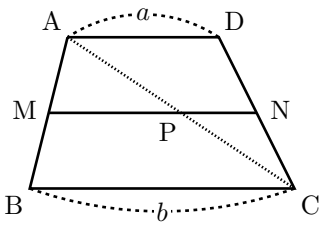
ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　平面図形　知識　台形と平均　1001　解答解説

1.　DA // BC である台形 ABCD があり, 上底 DA $= a$, 下底 BC $= b$, かつ $a < b$ とする. また, MN が上底・下底に平行になるように, 辺 AB, CD 上にそれぞれ M, N を考える. 次の条件のとき, MN の長さを a, b で表せ.

（ S 級 15 秒, A 級 1 分 12 秒, B 級 4 分, C 級 7 分 ）

(1)　M, N がそれぞれ AB, CD の中点であるとき.



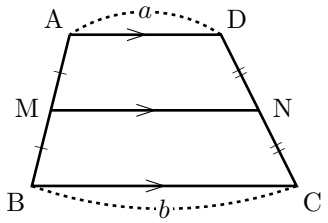
△ABC に中点連結定理を適用して,

$$\mathrm{MP} = \frac{b}{2}$$

△CDA に中点連結定理を適用して,

$$\mathrm{NP} = \frac{a}{2}$$

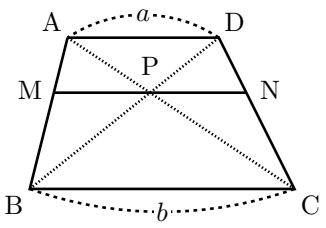
$$\therefore \quad \mathrm{MN} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} = \boldsymbol{\frac{a+b}{2}}$$



★ 台形と相加平均 (*Arithmetic mean*)

左図の条件のとき,
MN の長さは,
上底 a と下底 b の **相加平均** $\boldsymbol{\frac{a+b}{2}}$

(2)　MN 上に, 対角線 AC, BD の交点があるとき.



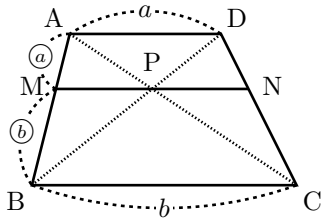
△PDA ∽ △PBC より, PD : PB $= a : b$

△DPN ∽ △DBC より,

$$\mathrm{PN} = \frac{a}{a+b} \times \mathrm{BC} = \frac{ab}{a+b}$$

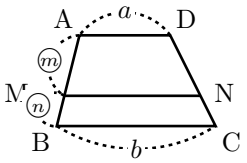
MP も同様にして, $\frac{ab}{a+b}$

$$\therefore \mathrm{MN} = \frac{ab}{a+b} \times 2 = \boldsymbol{\frac{2ab}{a+b}}$$



★ 台形と調和平均 (*Harmonic mean*)

左図の条件のとき,
MN の長さは,
上底 a と下底 b の **調和平均** $\boldsymbol{\frac{2ab}{a+b}}$



★ 台形と加重平均 (*weighted average*) … ☆内分点公式と同値

(1) と (2) を一般化しよう. 左図のように平行線の距離の比が $m : n$ のとき,
MN の長さは, **加重平均** $\boldsymbol{\frac{na+mb}{m+n}}$

★ 加重平均

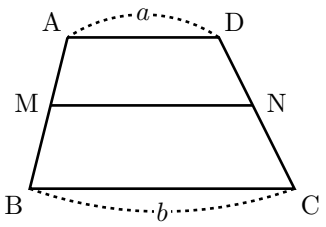
グループ A, B の平均値がそれぞれ a, b , グループ A, B の度数 (人数・個数) 比が $m : n$ のとき,
グループ A, B を混ぜた全体の平均値は　$\frac{ma+nb}{m+n}$　となる. 長さのときと違って m と n が逆になることに注意.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. DA // BC である台形 ABCD があり, 上底 DA $= a$, 下底 BC $= b$, かつ $a < b$ とする. また, MN が上底・下底に平行になるように, 辺 AB, CD 上にそれぞれ M, N を考える. 次の条件のとき, MN の長さを a, b で表せ.

(S 級 15 秒, A 級 1 分 50 秒, B 級 4 分, C 級 7 分)

(1) 四角形 AMND と四角形 MBCN が相似であるとき.



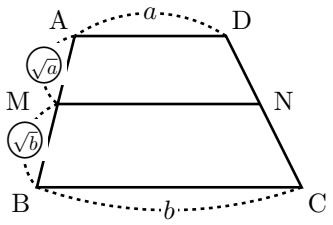
四角形 AMND ∽ 四角形 MBCN であるから,

DA : MN = NM : BC

⇒ a : MN = MN : b

⇔ $\mathrm{MN}^2 = ab$

a, b は正であるから, MN $= \boldsymbol{\sqrt{ab}}$



★ 台形と相乗平均 (*Geometric mean*)

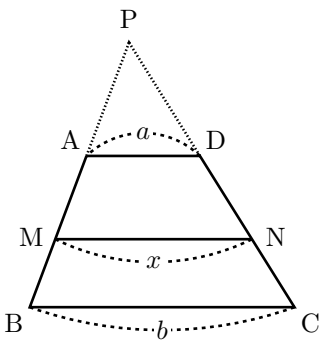
左図で上と下の台形が相似のとき,

MN の長さは,

上底 a と下底 b の **相乗平均** $\boldsymbol{\sqrt{ab}}$

ちなみに, AM : MB $= \sqrt{a} : \sqrt{b}$

(2) MN で台形 ABCD の面積が 2 等分されるとき.



MN の長さを x とする. ($x > 0$)

△PAD ∽ △PMN ∽ △PBC

相似比が $a : x : b$ ⇒ 面積比が $a^2 : x^2 : b^2$

台形 AMND = 台形 MBCN より,

$$x^2 - a^2 = b^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \boldsymbol{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}$$

☆別解 台形 ABCD の高さを 1 , 台形 AMND の高さを h とする.

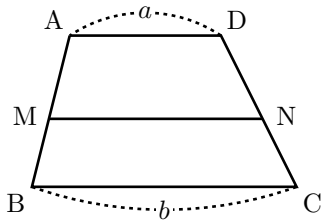
台形 AMND = 台形 MBCN = $\frac{1}{2}$台形 ABCD

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+x)h}{2} = \frac{(b+x)(1-h)}{2} = \frac{a+b}{4}$$

ここから, x を消去して, h について整理すれば,

$$2(a-b)h^2 - 4ah + a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{2a \pm \sqrt{2a^2 + 2b^2}}{2(a-b)}$$

$0 < h < 1$ より, $h = \dfrac{2a - \sqrt{2a^2 + 2b^2}}{2(a-b)}$ $\quad \therefore\ x = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}}$



★ 台形と 2 乗平均平方根 (*Root − mean Square* ; *RMS*)

左図で上と下の台形の面積が等しいとき,

MN の長さは,

上底 a と下底 b の **2 乗平均平方根** (***RMS***) $\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}}$

☆ *RMS* (*Root − mean Square*)

電磁場の 2 乗で定義される光の強度の平均をとる場合など,

物理や電気工学などでしばしば用いられる.

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)