反射テスト　平面図形　知識　調和平均　0901

1. 　$\triangle$ABC があり, C を通って辺 AB に平行な線上に D をとる. ただし線分 AC と線分 BD が交点 E をもつように D をとる. E を通って AB と平行な線と線分 BC との交点を F とする. AB $= a$, CD $= b$ とするとき, EF の長さを a, b で表せ. 証明もせよ.
（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

2. A を頂角とする二等辺三角形 ABC があり, 辺 BC の中点を M とする. 辺 AB 上で AB の中点と B との間に点 P をとり, 直線 PM と直線 AC の交点を Q とする. $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{AP} = p$, $\mathrm{AQ} = q$ とするとき, 前ページの調和平均を用いて, a, p, q の関係式を求めよ.

(S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

反射テスト　平面図形　知識　調和平均　0901　解答解説

1.　△ABC があり, C を通って辺 AB に平行な線上に D をとる. ただし線分 AC と線分 BD が交点 E をもつように D をとる. E を通って AB と平行な線と線分 BC との交点を F とする. AB $= a$, CD $= b$ とするとき, EF の長さを a, b で表せ. 証明もせよ.
（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

図 1

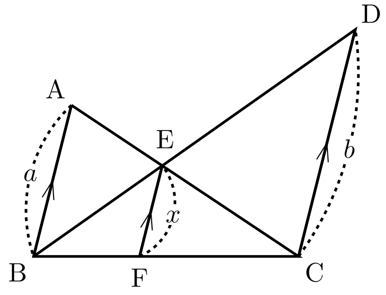


図 1 のように描ければ, 図は OK.

求める EF の長さを x とする.

★ 図形の基本は三角形

x を一辺とする三角形の相似を考える.

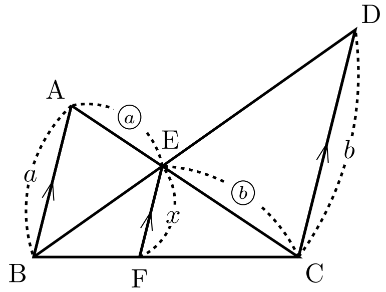
★ 山型相似

△CEF ∽ △CAB

△BEF ∽ △BDC

どちらでも解ける. 前者を使おう.

図 2



ということは, EA : EC がわかれば良い.

△EAB ∽ △ECD より,

　EA : EC = AB : CD $= a : b$

△CEF ∽ △CAB より,

　EF : AB = CE : CA

$\Rightarrow \quad x : a = b : (a+b) \quad \Leftrightarrow \quad x = \boldsymbol{\dfrac{ab}{a+b}}$

★ 調和平均（ $Harmonic\ mean$ ）

上図 1 の条件のとき, EF の長さを, a と b の **調和平均** という.

　調和平均　$\boldsymbol{x = \dfrac{ab}{a+b}}$

調和平均は次のように変形もできる.

$$x = \frac{ab}{a+b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

2. A を頂角とする二等辺三角形 ABC があり, 辺 BC の中点を M とする. 辺 AB 上で AB の中点と B との間に点 P をとり, 直線 PM と直線 AC の交点を Q とする. $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{AP} = p$, $\mathrm{AQ} = q$ とするとき, 前ページの調和平均を用いて, a, p, q の関係式を求めよ.

（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

図 1

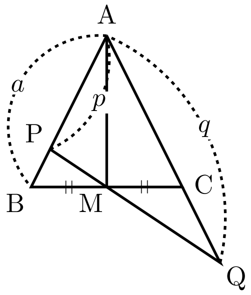
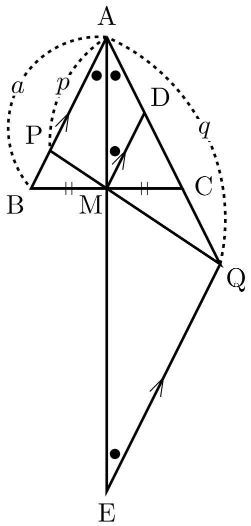


図 1 のように描ければ, 図は OK.

★ **調和平均** の形から平行線の補助線が必要.

★ **補助線の基本は, 延長・平行・垂直**
延長線・平行線で, 調和平均の形を作ろう.

図 2



AB と平行で, M を通る直線と AC との交点を D とする.

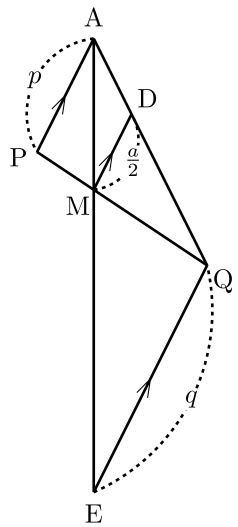
AB と平行で, Q を通る直線と AM との交点を E とする.

平行から錯角は等しいので, 左図 2 のように等角記号が入る.

△CAB に中点連結定理を適用し, $\mathrm{DM} = \frac{a}{2}$

△QAE は二等辺三角形だから, $\mathrm{QE} = q$

図 3



ちょうど左図 3 が, 前ページの★ **調和平均** の形になるので公式が使える.

★ **調和平均** から,

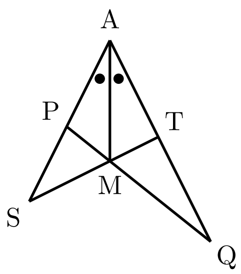
$$\frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{2}{a} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$$

もちろん以下も正解.

$$\boldsymbol{\frac{a}{2} = \frac{pq}{p+q}} \quad \text{や} \quad \boldsymbol{a = \frac{2pq}{p+q}} \quad \text{など}$$

★シーソーの定理 … **★調和平均の応用**



以上のことから, 左図について次のことが言える.

★ **シーソーの定理** …**調和平均の応用**

$$\boldsymbol{\frac{1}{\mathrm{AP}} + \frac{1}{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{\mathrm{AS}} + \frac{1}{\mathrm{AT}}}$$