反射テスト　平面図形　知識　加重平均（内分点公式・外分点公式）　0901

1.　AD // BC である台形 ABCD があり, 上底 AD $= a$, 下底 BC $= b$, かつ $a < b$ とする．また, MN が上底・下底に平行になるように, 辺 AB,CD 上にそれぞれ M,N を考える．DN : NC $= m : n$ のとき, MN の長さを a, b, m, n で表せ．必要な証明もせよ．

（ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

2. AD // BC である台形 ABCD があり, 上底 AD $= a$, 下底 BC $= b$, かつ $a < b$ とする. 直線 AB と直線 DC の交点を O とし, MN が上底・下底に平行になるように, 線分 OA,OD 上にそれぞれ M,N を考える. ND : NC $= m : n$ のとき, MN の長さを a, b, m, n で表せ. 前ページの公式を用いてもよい. （ S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

反射テスト　平面図形　知識　加重平均（内分点公式・外分点公式）　0901　解答解説

1.　AD // BC である台形 ABCD があり，上底 AD $= a$，下底 BC $= b$，かつ $a < b$ とする．また，MN が上底・下底に平行になるように，辺 AB,CD 上にそれぞれ M,N を考える．DN : NC $= m : n$ のとき，MN の長さを a, b, m, n で表せ．必要な証明もせよ．

（ S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 8 分 ）

図 1

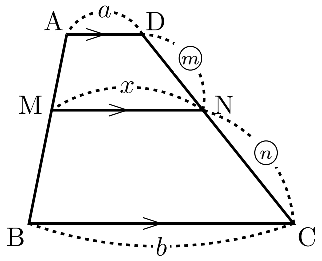


図 1 のように描ければ，図は OK．

求める MN の長さを x とする．

★ 図形の基本は三角形

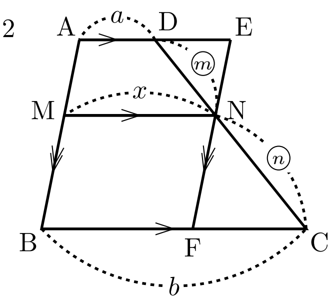
★ 長さを求める基本 3 解法は相似・三平方・逆算

m, n をそれぞれ一辺とする三角形の相似を考える．

★ 補助線の基本は，延長・平行・垂直

延長線・平行線で相似を作ろう．

図 2



一つの方法は，図 2 のように

AB と平行で N を通る補助線を考える．

図のように E,F をおけば，

　△NED ∽ △NFC

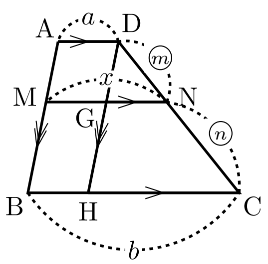
四角形 AMNE, MBFN がそれぞれ平行四辺形で対辺が等しいから，

　ED $= x - a$, FC $= b - x$

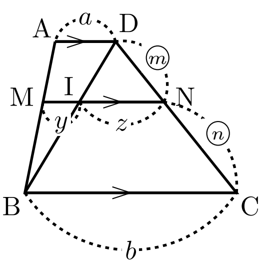
相似比 $m : n$ から，

$$(x - a) : (b - x) = m : n \quad \Leftrightarrow \quad x = \boldsymbol{\frac{na + mb}{m + n}}$$

別解 1 図 3 山型相似



別解 2 図 4 山型相似 2 つ



別解 1　図 3　山型相似

　△DGN ∽ △DHC から，$(x - a) : (b - a) = m : (m + n)$

別解 2　図 4　山型相似 2 つ

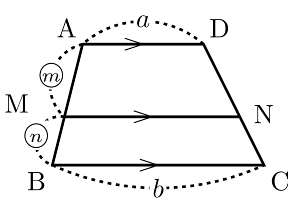
　△BIM ∽ △BDA　$\Rightarrow$　$y : a = n : (m + n)$

　△DIN ∽ △DBC　$\Rightarrow$　$z : b = m : (m + n)$

y, z を求めて，$x = y + z$

おそらくこれが証明としては簡便．

★ 加重平均と内分点公式



★ 加重平均 (*weighted average*)　グループ A,B の平均値がそれぞれ a, b で，

グループ A,B の度数 (人数・個数) 比が $m : n$ のとき，

グループ A,B を混ぜた全体の平均値は $\dfrac{ma + nb}{m + n}$ となる．

長さのときと違って m と n が逆になることに注意．

★ 内分点公式

左図で，M を，線分 AB を $m : n$ に内分する点 (**内分点**) という．

左図に対して，次の公式を **内分点公式** という．

$$\mathbf{MN} = \boldsymbol{\frac{na + mb}{m + n}}$$

★座標平面での内分点公式 (中学生用)

★座標平面での内分点公式 (高校生用)

★ベクトルと内分点公式

★ベクトルと内分点公式 (成分表示)

2. AD // BC である台形 ABCD があり，上底 AD $= a$，下底 BC $= b$，かつ $a < b$ とする．直線 AB と直線 DC の交点を O とし，MN が上底・下底に平行になるように，線分 OA,OD 上にそれぞれ M,N を考える．ND : NC $= m : n$ のとき，MN の長さを a, b, m, n で表せ．前ページの公式を用いてもよい．（S 級 2 分，A 級 3 分 30 秒，B 級 5 分，C 級 8 分）

図 1

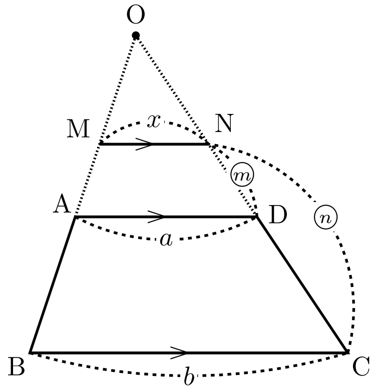


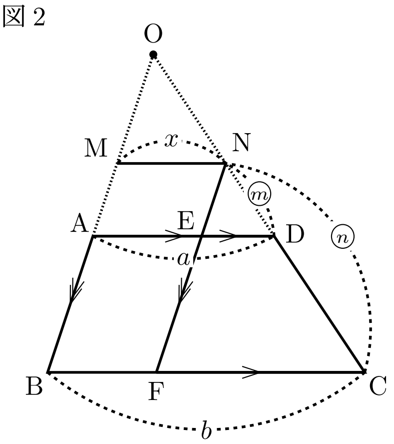
図 1 のように描ければ，図は OK．
求める MN の長さを x とする．

前ページの **★ 内分点公式** を台形 MBCN に適用して，

$$a = \frac{(n-m)x + mb}{m + (n-m)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \boldsymbol{\frac{-na + mb}{m - n}}$$

別解 1 図 2



★ 図形の基本は三角形
★ 長さを求める基本 3 解法は相似・三平方・逆算
m, n をそれぞれ一辺とする三角形の相似を考える．

★ 補助線の基本は，延長・平行・垂直
延長線・平行線で相似を作ろう．

別解の 1 つは，図 2 のように
AB と平行で N を通る補助線を考える．
図 2 のように E,F をおけば，
$\triangle$NED $\backsim$ $\triangle$NFC
四角形 MAEN, MBFN がそれぞれ平行四辺形だから，
ED $= a - x$, FC $= b - x$
相似比 $m : n$ から，

$$(a-x) : (b-x) = m : n \quad \Leftrightarrow \quad x = \boldsymbol{\frac{-na + mb}{m - n}}$$

☆前ページ同様，別解が考えられる．
☆別解 2　$\triangle$OMN $\backsim$ $\triangle$OAD $\backsim$ $\triangle$OBC を用いる．
☆別解 3　D を通り，AB と平行な線を引く．

★ 外分点公式
図 1 で，N を，線分 DC を $m : n$ に外分する点 (**外分点**) という．
このとき，次の公式を **外分点公式** という．

$$\mathbf{MN} = \boldsymbol{\frac{-na + mb}{m - n}}$$

★座標平面での外分点公式