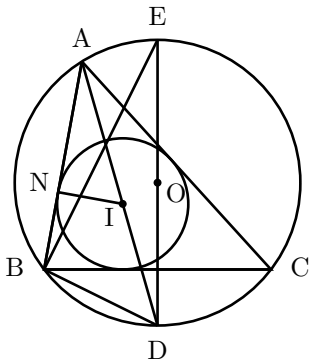


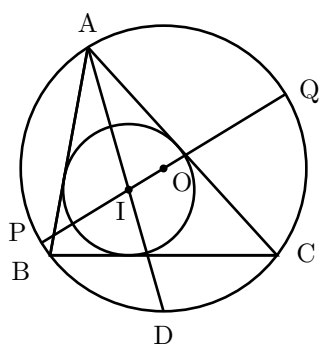
反射テスト 平面図形 証明 内心と外心との距離 01

1. $\triangle ABC$ の内接円と外接円を考える. 内心を I , 外心を O , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする. 直線 AI と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする. 直線 DO と外接円の交点のうち, D ではない方を E とする. また内心 I から AB に下ろした垂線の足を N とする.
- (S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 15 分, C 級 20 分)



- (1) $BD = ID$ を証明せよ.
- (2) $\triangle ANI \sim \triangle EBD$ を証明せよ.
- (3) $2Rr = AI \cdot ID$ を証明せよ.

2. $\triangle ABC$ の内接円と外接円を考える. 内心を I , 外心を O , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R , 内心 I と外心 O の距離を d とする. 直線 AI と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする. また直線 OI と外接円との交点を下図のように P, Q とする. 前ページで証明したことは, 証明なしに使ってよい. (S 級 2 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分 30 秒, C 級 10 分)

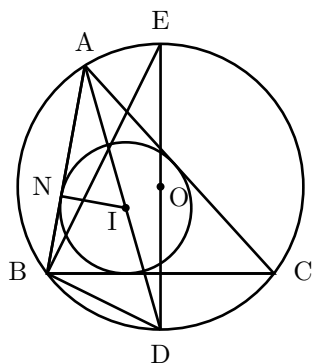


(1) $2Rr = R^2 - d^2$ を証明せよ.

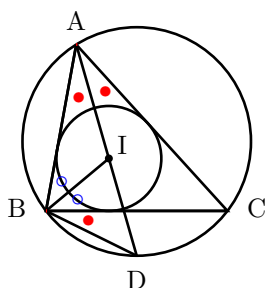
(2) $R \geq 2r$ を証明せよ.

反射テスト 平面図形 証明 内心と外心との距離 01 解答解説

1. $\triangle ABC$ の内接円と外接円を考える. 内心を I , 外心を O , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする. 直線 AI と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする. 直線 DO と外接円の交点のうち, D ではない方を E とする. また内心 I から AB に下ろした垂線の足を N とする.
(S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 15 分, C 級 20 分)



- (1) $BD = ID$ を証明せよ.
- (2) $\triangle ANI \sim \triangle EBD$ を証明せよ.
- (3) $2Rr = AI \cdot ID$ を証明せよ.



- (1) $\triangle DIB$ において, (左図参照)

$$\begin{aligned} \angle DIB &= \angle IAB + \angle ABI \quad \because \angle DIB \text{ は } \triangle IAB \text{ の外角.} \\ &= \angle DAC + \angle CBI \quad \because \text{内心 } I \text{ は三角形の内角の二等分線上.} \\ &= \angle DBC + \angle CBI \quad \because \widehat{DC} \text{ の円周角は等しい.} \\ &= \angle DBI \end{aligned}$$

以上から, $\triangle DIB$ は二等辺三角形. ゆえに, $BD = ID$.

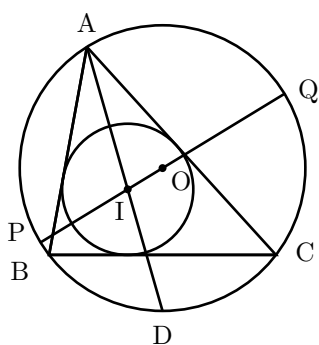
(2)

$\triangle ANI$ と $\triangle EBD$ において,
 $\angle IAN = \angle DEB \quad \because \widehat{BD}$ の円周角は等しい.
 $\angle ANI = \angle EBD \quad \because N$ は内接円の接点, DE は直径なので, ともに 90° .
 $\triangle ANI \sim \triangle EBD \quad \because$ 二角相等

(3)

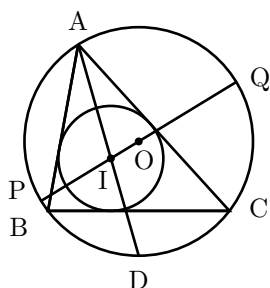
(2) から, $AI : NI = ED : BD \Leftrightarrow NI \cdot ED = AI \cdot BD$
 $NI = r$, $ED = 2R$ であるから, $2Rr = AI \cdot BD$
(1) から, $BD = ID$ であるから, $2Rr = AI \cdot ID$

2. $\triangle ABC$ の内接円と外接円を考える. 内心を I , 外心を O , 内接円の半径を r , 外接円の半径を R , 内心 I と外心 O の距離を d とする. 直線 AI と外接円の交点のうち, A ではない方を D とする. また直線 OI と外接円との交点を下図のように P, Q とする. 前ページで証明したことは, 証明なしに使ってよい. (S 級 2 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分 30 秒, C 級 10 分)



(1) $2Rr = R^2 - d^2$ を証明せよ.

(2) $R \geq 2r$ を証明せよ.



- (1) 方べきの定理より, $AI \cdot ID = IP \cdot IQ$
これを 1(3) の等式に代入して,

$$\begin{aligned} 2Rr &= AI \cdot ID \\ &= IP \cdot IQ \\ &= (OP - OI) \cdot (OP + OI) \\ &= (R - d) \cdot (R + d) \\ &= R^2 - d^2 \end{aligned}$$

(2)

2(1) の等式を変形して,

$$\begin{aligned} 2Rr &= R^2 - d^2 \\ \Leftrightarrow R^2 - 2Rr &= d^2 \end{aligned}$$

$d^2 \geq 0$ かつ $R > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} R^2 - 2Rr &\geq 0 \\ \Leftrightarrow R(R - 2r) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow R - 2r &\geq 0 \\ \Leftrightarrow R &\geq 2r \end{aligned}$$

等号条件は, $d = 0$ のとき. つまり, 内心と外心が一致するときになるので, $\triangle ABC$ が正三角形のときである.

★ オイラーの定理 (Euler's theorem) 「 $R(R - 2r) = d^2$ 」

レオンハルト・オイラーは, 1765 年にこの関係について述べているが, William Chapple は同じ関係式を 1745 年に発表している. このため, この定理は, Chapple の定理, Chapple-オイラーの定理などとも呼ばれる.

★ オイラーの不等式 (Euler's inequality) 「 $R \geq 2r$ 」

- ・ 三角比を用いた証明もある. [こちら](#) を参照.
- ・ 他の証明 外接円・内接円の公式から [相加相乗平均の関係](#) を用いて証明する.

三角形の 3 辺 a, b, c に対して, $s = \frac{a+b+c}{2}$ とする. $S = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{s}$ から,

$$S - 2r = \frac{abc - 8S^2}{4Ss}$$

ヘロンの公式と相加相乗平均の関係から,

$$\begin{aligned} 8S^2 &= 8s(s-a)(s-b)(s-c) = s \cdot 2\sqrt{(s-a)(s-b)} \cdot 2\sqrt{(s-b)(s-c)} \cdot 2\sqrt{(s-c)(s-a)} \\ &\leq s \{ (s-a) + (s-b) + (s-b) + (s-c) + (s-c) + (s-a) \} = abcs \end{aligned}$$

よって, $S - 2r \geq 0$ は示される.