反射テスト　平面図形　証明　内接円と傍接円　02

1.　$\triangle$ABC の 3 辺全てに接している円について考える．ただし辺の延長線上に接している場合も含む．
三角形の内部にあるものを内接円, 外部にあるものを傍接円とよぶ．内接円の中心（内心）を I,
傍接円のうち辺 BC をはさんで頂点 A と反対にあるものの中心（傍心）を J とする．
内接円 I と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ D,E,F とする．傍接円 J と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ U,V,W とする．
BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, そして, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とする．　　（ S 級 6 分, A 級 9 分, B 級 12 分, C 級 15 分 ）

(1)　AF , FB , BW を a, b, c, s で簡潔に表せ．

(2)　★ヘロンの公式 $\triangle\mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ から, 内接円の半径 r を a, b, c, s で簡潔に表せ．

2. $\triangle$ABC の 3 辺全てに接している円について考える．ただし辺の延長線上に接している場合も含む．
三角形の内部にあるものを内接円, 外部にあるものを傍接円とよぶ．内接円の中心（内心）を I,
傍接円のうち辺 BC をはさんで頂点 A と反対にあるものの中心（傍心）を J とする．
内接円 I と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ D,E,F とする．傍接円 J と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ U,V,W とする．
$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$, そして, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とする．（ S 級 6 分, A 級 9 分, B 級 12 分, C 級 15 分 ）

（1） AW , BU , CU を求めよ．

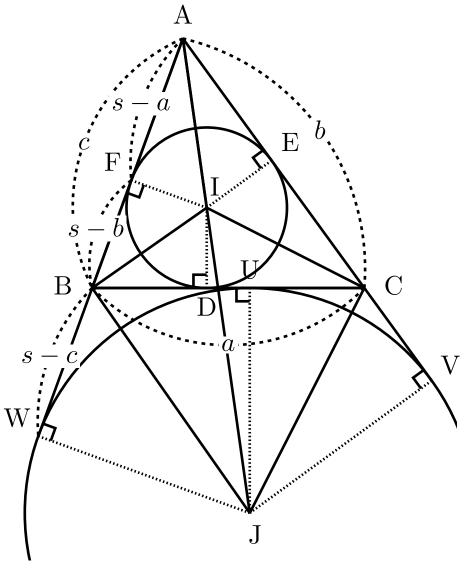
（2） ★ヘロンの公式 $\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ から, 傍接円の半径 R を a,b,c,s で簡潔に表せ．

反射テスト　平面図形　証明　内接円と傍接円　02　解答解説

1.　$\triangle$ABC の 3 辺全てに接している円について考える．ただし辺の延長線上に接している場合も含む．
三角形の内部にあるものを内接円, 外部にあるものを傍接円とよぶ．内接円の中心（内心）を I,
傍接円のうち辺 BC をはさんで頂点 A と反対にあるものの中心（傍心）を J とする．
内接円 I と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ D,E,F とする．傍接円 J と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ U,V,W とする．
$\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$, そして, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とする．　（ S 級 6 分, A 級 9 分, B 級 12 分, C 級 15 分 ）

(1)　AF , FB , BW を a,b,c,s で簡潔に表せ．

(2)　★ヘロンの公式 $\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ から, 内接円の半径 r を a,b,c,s で簡潔に表せ．



(1)
斜辺の等しい直角三角形で, もう 1 辺も等しい (内接円の半径) から,

$\triangle\mathrm{IAE}\ \equiv\ \triangle\mathrm{IAF}$
$\triangle\mathrm{IBF}\ \equiv\ \triangle\mathrm{IBD}$
$\triangle\mathrm{ICD}\ \equiv\ \triangle\mathrm{ICE}$

$x=\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$, $y=\mathrm{BF}=\mathrm{BD}$, $z=\mathrm{CD}=\mathrm{CE}$ とすれば,

$$y+z=a\ ,\ z+x=b\ ,\ x+y=c\quad\Leftrightarrow\quad x=s-a\ ,\ y=s-b\ ,\ z=s-c$$

同様に, 斜辺の等しい直角三角形で, もう 1 辺も等しい (傍接円の半径) から,

$\triangle\mathrm{JAV}\ \equiv\ \triangle\mathrm{JAW}$
$\triangle\mathrm{JBW}\ \equiv\ \triangle\mathrm{JBU}$
$\triangle\mathrm{JCU}\ \equiv\ \triangle\mathrm{JCV}$

$l=\mathrm{AV}=\mathrm{AW}$, $m=\mathrm{BW}=\mathrm{BU}$, $n=\mathrm{CU}=\mathrm{CV}$ とすれば,

$$m+n=a\ ,\ l-n=b\ ,\ l-m=c\quad\Leftrightarrow\quad l=s\ ,\ m=s-c\ ,\ n=s-b$$

$$\boldsymbol{\mathrm{AF}=s-a\ ,\ \mathrm{FB}=s-b\ ,\ \mathrm{BW}=s-c\ .}$$

(2)
内接円の半径 r と $\triangle$ABC の 3 辺 a,b,c から,

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}=\frac{(a+b+c)r}{2}=sr$$

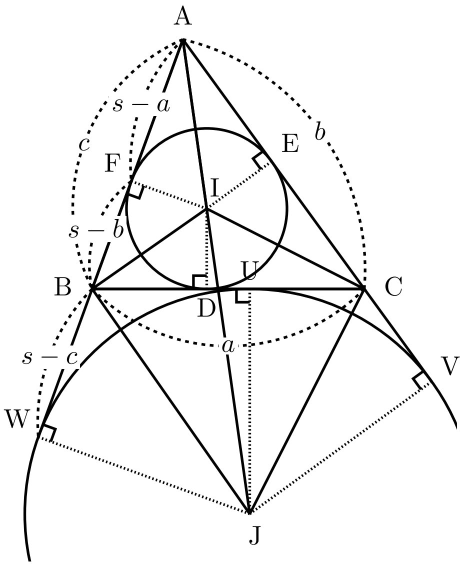
★ヘロンの公式 $\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ から,

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=sr\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$

2. $\triangle$ABC の 3 辺全てに接している円について考える．ただし辺の延長線上に接している場合も含む．
三角形の内部にあるものを内接円, 外部にあるものを傍接円とよぶ．内接円の中心（内心）を I,
傍接円のうち辺 BC をはさんで頂点 A と反対にあるものの中心（傍心）を J とする．
内接円 I と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ D,E,F とする．傍接円 J と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ U,V,W とする．
$\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{AB} = c$, そして, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とする． （ S 級 6 分, A 級 9 分, B 級 12 分, C 級 15 分 ）

(1) AW , BU , CU を求めよ．

(2) ★ヘロンの公式 $\triangle\mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ から, 傍接円の半径 R を a,b,c,s で簡潔に表せ．



(1)
斜辺の等しい直角三角形で, もう 1 辺も等しい (内接円の半径) から,

$\triangle\mathrm{IAE} \equiv \triangle\mathrm{IAF}$
$\triangle\mathrm{IBF} \equiv \triangle\mathrm{IBD}$
$\triangle\mathrm{ICD} \equiv \triangle\mathrm{ICE}$

$x = \mathrm{AE} = \mathrm{AF}$, $y = \mathrm{BF} = \mathrm{BD}$, $z = \mathrm{CD} = \mathrm{CE}$ とすれば,

$$y+z=a \ , \ z+x=b \ , \ x+y=c \quad \Leftrightarrow \quad x=s-a \ , \ y=s-b \ , \ z=s-c$$

同様に, 斜辺の等しい直角三角形で, もう 1 辺も等しい (傍接円の半径) から,

$\triangle\mathrm{JAV} \equiv \triangle\mathrm{JAW}$
$\triangle\mathrm{JBW} \equiv \triangle\mathrm{JBU}$
$\triangle\mathrm{JCU} \equiv \triangle\mathrm{JCV}$

$l = \mathrm{AV} = \mathrm{AW}$, $m = \mathrm{BW} = \mathrm{BU}$, $n = \mathrm{CU} = \mathrm{CV}$ とすれば,

$$m+n=a \ , \ l-n=b \ , \ l-m=c \quad \Leftrightarrow \quad l=s \ , \ m=s-c \ , \ n=s-b$$

$$\mathbf{AW} = \boldsymbol{s} \ , \ \mathbf{BU} = \boldsymbol{s-c} \ , \ \mathbf{CU} = \boldsymbol{s-b} \ .$$

(2)
傍接円の半径 R と $\triangle$ABC の 3 辺 a,b,c から,

$$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{JAB} + \triangle\mathrm{JCA} - \triangle\mathrm{JBC} = \frac{(-a+b+c)R}{2} = (s-a)r$$

★ヘロンの公式 $\triangle\mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ から,

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = (s-a)R \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{R = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}}$$

★ **リュイリエの定理** (L'Huilier's theorem) ⋯ 傍接円の半径の逆数和は内接円の半径の逆数に等しい．
これまでの証明と対称性から, 内接円の半径は $\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,
3 つの傍接円の半径はそれぞれ $\sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$, $\sqrt{\dfrac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}$, $\sqrt{\dfrac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$ となる．
3 つの傍接円の逆数和は,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{s-a}{s(s-b)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s-b}{s(s-c)(s-a)}} + \sqrt{\frac{s-c}{s(s-a)(s-b)}} \\
= & \frac{s-a}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} + \frac{s-b}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} + \frac{s-c}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \\
= & \frac{s}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}
\end{aligned}$$

となり, 内接円の半径の逆数と等しいことがわかる．