反射テスト　平面図形　証明　内接円と傍接円　01

1.　$\triangle$ABC の 3 辺全てに接している円について考える. ただし辺の延長線上に接している場合も含む.
三角形の内部にあるものを内接円, 外部にあるものを傍接円とよぶ. 内接円の中心（内心）を I,
傍接円のうち辺 BC をはさんで頂点 A と反対にあるものの中心（傍心）を J とする.
内接円 I と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ D,E,F とする.
傍接円 J と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ U,V,W とする.　　（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

（1）　$\triangle$ABC に傍接円はいくつあるか.

（2）　A,I,J が一直線上にあることを証明せよ.

2.　△ABC の 3 辺全てに接している円について考える．ただし辺の延長線上に接している場合も含む．
三角形の内部にあるものを内接円, 外部にあるものを傍接円とよぶ．内接円の中心（内心）を I,
傍接円のうち辺 BC をはさんで頂点 A と反対にあるものの中心（傍心）を J とする．
内接円 I と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ D,E,F とする．
傍接円 J と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ U,V,W とする．　（ S 級 6 分, A 級 9 分, B 級 12 分, C 級 15 分 ）

(1)　B,I,J はどんな位置関係であるか, 証明も交えながら言え．

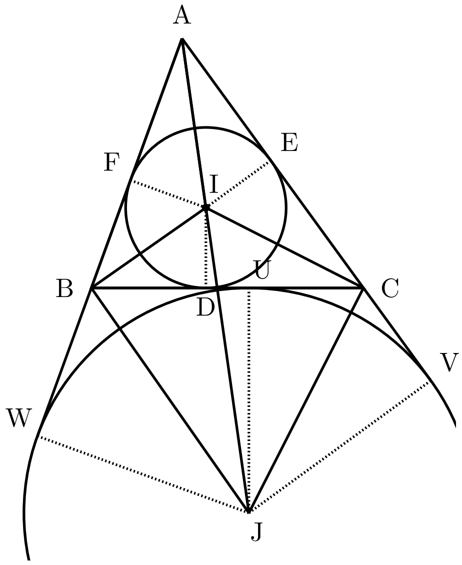
(2)　頂点 B をもつ三角形の中で, 合同ではないが, 相似であるものがある．それらを相似記号を用いて言え．

反射テスト　平面図形　証明　内接円と傍接円　01　解答解説

1. 　$\triangle$ABC の 3 辺全てに接している円について考える. ただし辺の延長線上に接している場合も含む.
三角形の内部にあるものを内接円, 外部にあるものを傍接円とよぶ. 内接円の中心（内心）を I,
傍接円のうち辺 BC をはさんで頂点 A と反対にあるものの中心（傍心）を J とする.
内接円 I と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ D,E,F とする.
傍接円 J と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ U,V,W とする.　（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1)　$\triangle$ABC に傍接円はいくつあるか.

(2)　A,I,J が一直線上にあることを証明せよ.



(1)

3 つ

(2)

$\triangle$AIE　と　$\triangle$AIF　において,

AI　=　AI　（共通）

IE　=　IF　（同一円の半径）

$\angle$IEA　=　$\angle$IFA　=　90°　（接線と半径は接点で直角）

よって, 斜辺の等しい直角三角形でもう一辺も等しいから,

$\triangle$AIE $\equiv$ $\triangle$AIF

対応する角は等しいから, $\angle$IAE = $\angle$IAF .

AI は $\triangle$ABC の内角 A の二等分線である.

同様に $\triangle$AJV $\equiv$ $\triangle$AJW も言える.

対応する角は等しいから, $\angle$JAV = $\angle$JAW となり,

AJ は $\triangle$ABC の内角 A の二等分線である.

以上から, A,I,J は一直線上にある.

★ 三角形の頂点, 内心, 傍心は一直線上に並ぶ.

★ 内心は三角形の内角の二等分線の交点.

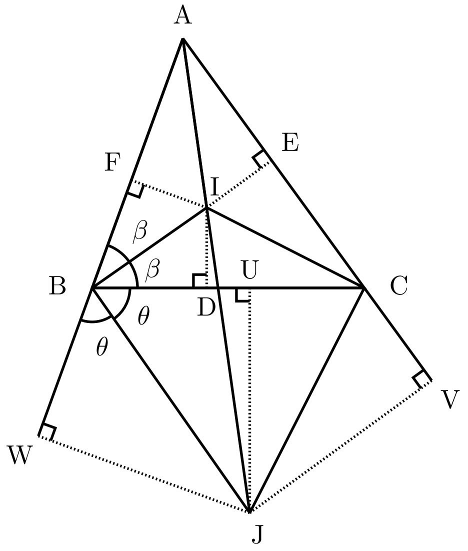
★ 傍心は, 対する内角の二等分線上にある.

★ $\triangle$AIE $\equiv$ $\triangle$AIF $\backsim$ $\triangle$AJV $\equiv$ $\triangle$AJW .

2.　△ABC の 3 辺全てに接している円について考える. ただし辺の延長線上に接している場合も含む.
三角形の内部にあるものを内接円, 外部にあるものを傍接円とよぶ. 内接円の中心（内心）を I,
傍接円のうち辺 BC をはさんで頂点 A と反対にあるものの中心（傍心）を J とする.
内接円 I と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ D,E,F とする.
傍接円 J と辺 BC,CA,AB の接点をそれぞれ U,V,W とする.　　　（ S 級 6 分, A 級 9 分, B 級 12 分, C 級 15 分 ）

（1）　B,I,J はどんな位置関係であるか, 証明も交えながら言え.

（2）　頂点 B をもつ三角形の中で, 合同ではないが, 相似であるものがある. それらを相似記号を用いて言え.



(1)　$\angle \mathrm{IBF} = \beta$ とする.

△BIF　と　△BID　において,

BI　=　BI　（ 共通 ）

IF　=　ID　（ 同一円の半径 ）

∠IFB　=　∠IDB　=　90°　（ 接線と半径は接点で直角 ）

よって, 斜辺の等しい直角三角形でもう一辺も等しいから,

△BIF ≡ △BID

対応する角は等しいから, $\angle \mathrm{IBF} = \angle \mathrm{IBD} = \beta$.

BI は △ABC の内角 B の二等分線である.

同様に △BJW ≡ △BJU も言えて, ∠JBW = ∠JBU .

$\angle \mathrm{JBW} = \angle \mathrm{JBU} = \theta$ とおくと, ∠FBW = 180° であるから,

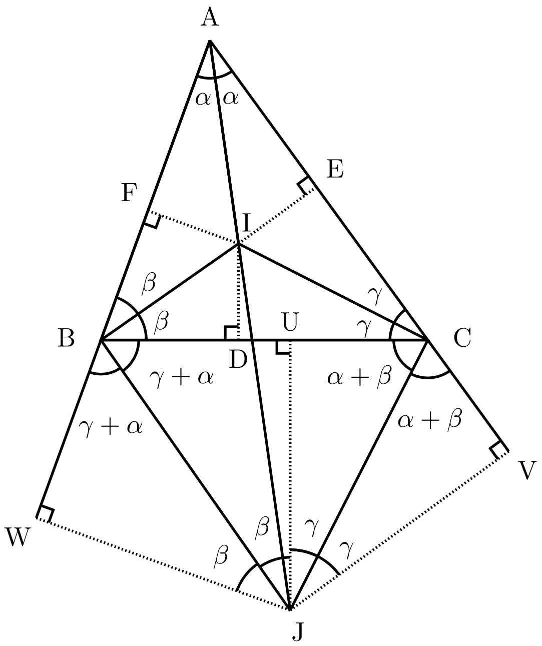
$2\beta + 2\theta = 180°$　≡　$\beta + \theta = 90°$.

よって, B,I,J は, **∠IBJ = 90° を作る.** .

(2)　△BJU の内角の和が 180° であることから,　$\angle \mathrm{BJU} = 180° - (\theta + 90°) = \beta$.

二角相等から, △BID ∽ △JBU .

(1) で導いたことと合わせると, **△BIF ≡ △BID ∽ △JBW ≡ △JBU** .



★ 内心・傍心 と 等角・合同・相似

$\angle \mathrm{IAE} = \alpha$, $\angle \mathrm{IBF} = \beta$, $\angle \mathrm{ICD} = \gamma$ とすると,

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ となり, 左図のように角度が決まる.

共通辺と二角相等から, 次の合同・相似が言える.

★ △AIE ≡ △AIF ∽ △AJV ≡ △AJW

★ △BIF ≡ △BID ∽ △JBW ≡ △JBU

★ △CID ≡ △CIE ∽ △JCU ≡ △JCV