反射テスト　平面図形　知識　内接円と傍接円　01

1.　平面上に1つの直線を考えると, 平面はこの直線によって2つの部分に分かれる. これを部分数が2であると定義する.

（ S 級1分30秒, A 級3分, B 級5分, C 級8分 ）

(1)　平面上に異なる2つの直線がある. 部分数はいくつか.

(2)　平面上に異なる3つの直線がある. 部分数はいくつか.

(3)　(2) で部分数が最大のときについて考える. 3つの直線全てに接する円はいくつあるか.

2. xy 平面上に 3 つの直線 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ を考える．この 3 直線全てと接する円の方程式を全て求めよ．

（ S 級 4 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分 ）

反射テスト　平面図形　知識　内接円と傍接円　01　解答解説

1.　平面上に 1 つの直線を考えると, 平面はこの直線によって 2 つの部分に分かれる. これを部分数が 2 であると定義する.

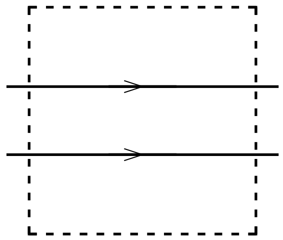
（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1)　平面上に異なる 2 つの直線がある. 部分数はいくつか.

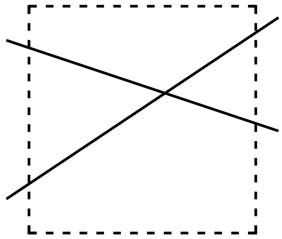
(2)　平面上に異なる 3 つの直線がある. 部分数はいくつか.

(3)　(2) で部分数が最大のときについて考える. 3 つの直線全てに接する円はいくつあるか.

① 2 直線が平行の場合



② 2 直線が平行ではない場合



(1)　場合分けが必要.

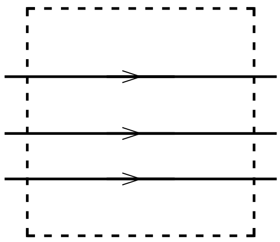
左図のように考えて,

①　**2 直線が平行の場合**　　**部分数は 3**.

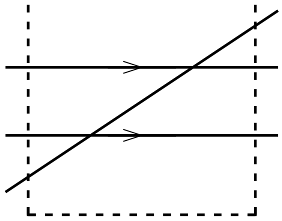
②　**2 直線が平行ではない場合**　　**部分数は 4**.

(2)　これも場合分けを考える.

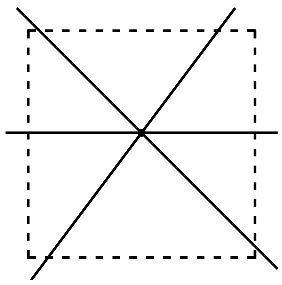
① 3 直線が平行の場合



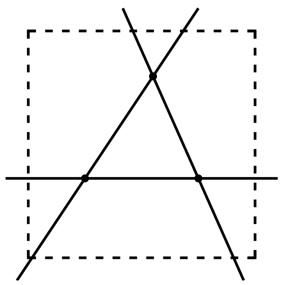
② 2 直線が平行の場合



③ 1 点で 3 直線が交わる場合



④ その他の場合

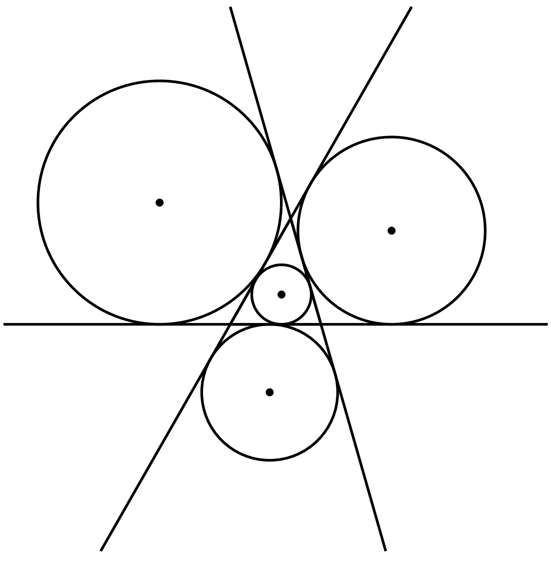


①　**3 直線が平行の場合**　　**部分数は 4**.

②　**2 直線が平行の場合**　　**部分数は 6**.

③　**1 点で 3 直線が交わる場合**　　**部分数は 6**.

④　**その他の場合**　　**部分数は 7**.



(3)

部分数が最大のとき, 3 直線によって三角形ができる.

左図から, 三角形の内部に円が 1 つ, 外部に 3 つできることがわかる.

$1 + 3 = 4$　$\Rightarrow$　**4 つ**

★ **内接円** (incircle / inscribed circle)

左図で三角形の内部にある円を, その三角形の **内接円** という,

内接円の中心は **内心** (incenter) という.

★ **傍接円** (excircle)

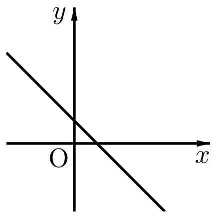
外部にある円を, その三角形の **傍接円** という.

傍接円の中心は **傍心** (excenter) という.

1 つの三角形に, 内接円は 1 つ, 傍接円は 3 つ必ずある.

2. 　xy 平面上に 3 つの直線 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ を考える．この 3 直線全てと接する円の方程式を全て求めよ．

（ S 級 4 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分 ）



x 軸 $y=0$ と y 軸 $x=0$ に接するので,

正の実数 p を用いて, 円の方程式は次のように表せる.

	象限	中心	半径	円の方程式
①	円の中心が第 1 象限にある場合,	(p,p)	p	$(x-p)^2+(y-p)^2=p^2$
②	円の中心が第 2 象限にある場合,	$(-p,p)$	p	$(x+p)^2+(y-p)^2=p^2$
③	円の中心が第 3 象限にある場合,	$(-p,-p)$	p	$(x+p)^2+(y+p)^2=p^2$
④	円の中心が第 4 象限にある場合,	$(p,-p)$	p	$(x-p)^2+(y+p)^2=p^2$

① のとき, 点 (p,p) と 直線 $x+y=1$ の距離は p , かつ $p>0$ より,

$$\frac{|\,p+p-1\,|}{\sqrt{1^2+1^2}}=p \quad\Leftrightarrow\quad |\,2p-1\,|=\sqrt{2}p$$

$$\Leftrightarrow\quad |\,2p-1\,|^2=\left(\sqrt{2}p\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 2^2-4p+1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad p=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2} \qquad \leftarrow \quad p>0 \text{ 満たすので，どちらも解である．}$$

同様にして, ② から ④ について調べると,

② 　のとき, $\dfrac{|\,-p+p-1\,|}{\sqrt{1^2+1^2}}=p \quad\Leftrightarrow\quad p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

③ 　のとき, $\dfrac{|\,-p-p-1\,|}{\sqrt{1^2+1^2}}=p \quad\Rightarrow\quad p=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$ 　$\leftarrow$ 　$p>0$ を満たさないので，不適当

④ 　のとき, $\dfrac{|\,p-p-1\,|}{\sqrt{1^2+1^2}}=p \quad\Leftrightarrow\quad p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって, 答えは,

	中心	円の方程式
①	$\left(\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2},\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right)$	$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
②	$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\boldsymbol{\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$
③	なし	なし
④	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

☆ 3 直線全てに接する円は 4 つある.（ この場合, 第 1 象限 2 つ, 第 2 象限に 1 つ, 第 4 象限に 1 つ. ）
第 1 象限にある 2 つの円のうち, 小さい方が内接円, 大きい方が傍接円になる.
上の問題で, 一般性を高めれば, 内接円が 1 つ, 傍接円が 3 つあることの解析学的な証明になりうるだろう.