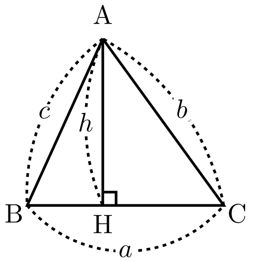
反射テスト　平面図形　証明　ヘロンの公式　01

1.　ヘロンの公式を証明したい. $\triangle$ABC に対して, a, b, c, h は下図のようにおき,
BH $= x$, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とする.　（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 15 分 ）



★ ヘロンの公式　$\boldsymbol{\triangle \mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ $\left(\textbf{ただし } \boldsymbol{s = \dfrac{a+b+c}{2}}\right)$

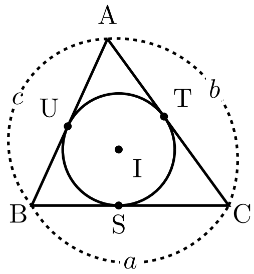
ヘロン　生没年不詳（紀元前 2 世紀〜紀元 3 世紀と様々な説がある. ）
古代ローマのアレキサンドリアのギリシャ人. 蒸気機関のアイデアや測量法でも有名. 著書「$Mertica$」でこの公式の証明を与えた. ラテン語の写本がローマの国立図書館に今も残る.

(1)　x を a, b, c で表せ.

(2)　(1) の結果を用いて, $(\triangle\mathrm{ABC})^2$ を a, b, c で表せ. ただし因数分解すること.

2.　$\triangle$ABC に対して, 内接円 I と接点 S,T,U と, a, b, c を下図のように定める.
内接円の半径を r , $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とするとき, 以下のヘロンの公式を用いて,

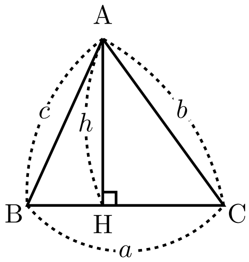
$r^2 = \dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$ を証明せよ.　（ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



★ ヘロンの公式　$\triangle\mathbf{ABC} = \sqrt{\boldsymbol{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ $\left(\textbf{ただし } \boldsymbol{s = \dfrac{a+b+c}{2}}\right)$

反射テスト　平面図形　証明　ヘロンの公式　01　解答解説

1.　ヘロンの公式を証明したい. △ABC に対して, a, b, c, h は下図のようにおき,
$\mathrm{BH}=x$, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とする.　（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 15 分 ）



★ ヘロンの公式　$\triangle\mathbf{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(\text{ただし } s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

ヘロン　生没年不詳（紀元前 2 世紀〜紀元 3 世紀と様々な説がある.）
古代ローマのアレキサンドリアのギリシャ人. 蒸気機関のアイデアや測量法でも有名. 著書「$Mertica$」でこの公式の証明を与えた. ラテン語の写本がローマの国立図書館に今も残る.

(1)　x を a, b, c で表せ.

三平方の定理から,
△ABH　⇒　$x^2+h^2=c^2$　$\cdots$ ①
△ACH　⇒　$(a-x)^2+h^2=b^2$
差をとって,　$2ax-a^2=c^2-b^2$
$a>0$ から, x について解けて,　$\boldsymbol{x=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}}$

(2)　(1) の結果を用いて, $(\triangle\mathrm{ABC})^2$ を a, b, c で表せ. ただし因数分解すること.

① に (1) の結果を代入して,

$$\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2+h^2=c^2$$
$$\Leftrightarrow\quad h^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\quad h^2=\left\{c+\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)\right\}\left\{c-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)\right\}$$
$$\Leftrightarrow\quad h^2=\frac{a^2+2ca+c^2-b^2}{2a}\cdot\frac{b^2-a^2+2ca-c^2}{2a}$$
$$\Leftrightarrow\quad h^2=\frac{(c+a)^2-b^2}{2a}\cdot\frac{b^2-(c-a)^2}{2a}$$
$$\Leftrightarrow\quad h^2=\frac{1}{4a^2}(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)$$

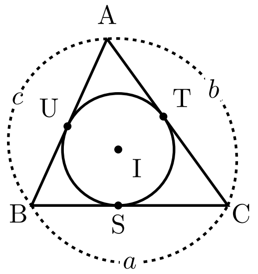
$$\begin{aligned}\therefore\quad(\triangle\mathrm{ABC})^2&=\left(\frac{ah}{2}\right)^2\\&=\frac{a^2}{4}\times\frac{1}{4a^2}(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{16}(a+b+b)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\qquad\cdots②\end{aligned}$$

$$s-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{-a+b+c}{2}$$
$$s-b=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{+a-b+c}{2}$$
$$s-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{+a+b-c}{2}$$

以上から, 面積は正の値なので, ② と ★ヘロンの公式が同値であることがわかる.
② の形で, a, b, c の対称性が美しいのを実感してほしい.

2. △ABC に対して, 内接円 I と接点 S,T,U と, a, b, c を下図のように定める.
内接円の半径を r , $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とするとき, 以下のヘロンの公式を用いて,

$r^2=\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$ を証明せよ. （ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



★ ヘロンの公式 $\boldsymbol{\triangle \mathrm{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ $\left(\text{ただし } \boldsymbol{s=\dfrac{a+b+c}{2}}\right)$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC}&=\triangle \mathrm{IBC}+\triangle \mathrm{ICA}+\triangle \mathrm{IAB}\\&=\frac{a\cdot \mathrm{IS}}{2}+\frac{b\cdot \mathrm{IT}}{2}+\frac{c\cdot \mathrm{IU}}{2}\\&=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}\\&=\frac{(a+b+c)r}{2}\end{aligned}$$

ゆえに　$\triangle \mathrm{ABC}=sr$

ヘロンの公式から,

$$(sr)^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$s\neq 0$　から,

$$r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

★ 内接円の半径

三角形の面積がわかっている場合,　$\boldsymbol{r=\dfrac{2\triangle \mathrm{ABC}}{a+b+c}}$

三角形の面積がわかっていない場合,　$\boldsymbol{r=\dfrac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}}$