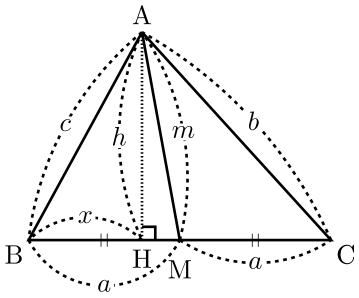
反射テスト　平面図形　証明　中線定理　01

1.　次の中線定理を証明したい. △ABC に対して, M を BC の中点とする.
また, A から辺 BC に下ろした垂線の足を H , BM = CM = a , CA = b , AB = c , AH = h , BH = x , AM = m とする.

（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分 ）



★ 中線定理

$$\boldsymbol{b^2 + c^2 = 2(m^2 + a^2)}$$

☆覚え方

∠AMB = 90°のときをイメージすると，三平方の定理と重なる.

(1)　b^2 を a, h, x で表せ.

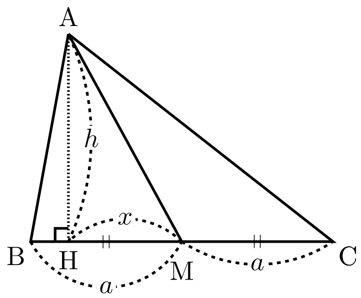
(2)　c^2 を h, x で表せ.

(3)　(1),(2) から, $b^2 + c^2$ を a, h, x で表せ.

(4)　$m^2 + a^2$ を a, h, x で表せ.

2.　次の中線定理を証明したい. $\triangle$ABC に対して, M を BC の中点とする.
また, A から辺 BC に下ろした垂線の足を H , $\mathrm{BM} = \mathrm{CM} = a$, $\mathrm{AH} = h$, $\mathrm{HM} = x$ とする.

（ S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 5 分 ）



★ 中線定理

$$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2\left(AM^2 + BM^2\right)}$$

☆覚え方

$\angle\mathrm{AMB} = 90^\circ$のときをイメージすると, 三平方の定理と重なる.

(1)　AB^2 を a, h, x で表せ.

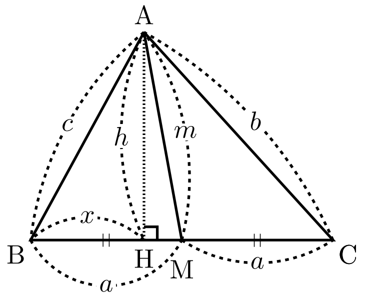
(2)　AC^2 を a, h, x で表せ.

(3)　(1),(2) から, $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$ を a, h, x で表せ.

反射テスト　平面図形　証明　中線定理　01　解答解説

1.　次の中線定理を証明したい. △ABC に対して, M を BC の中点とする.
また, A から辺 BC に下ろした垂線の足を H , BM = CM = a , CA = b , AB = c , AH = h , BH = x , AM = m とする.

（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分 ）



★ 中線定理

$\boldsymbol{b^2 + c^2 = 2(m^2 + a^2)}$

☆覚え方
∠AMB = 90°のときをイメージすると，三平方の定理と重なる.

(1)　b^2 を a, h, x で表せ.

三平方の定理から,
△ACH　⇒　$\boldsymbol{b^2 = (2a - x)^2 + h^2}$

(2)　c^2 を h, x で表せ.

三平方の定理から,
△ABH　⇒　$\boldsymbol{c^2 = x^2 + h^2}$

(3)　(1),(2) から, $b^2 + c^2$ を a, h, x で表せ.

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= (2a - x)^2 + x^2 + 2h^2 \\ &= \boldsymbol{4a^2 - 4ax + 2x^2 + 2h^2} \\ &= \boldsymbol{2(2a^2 - 2ax + x^2 + h^2)} \end{aligned}$$

(4)　$m^2 + a^2$ を a, h, x で表せ.

△AMH に三平方の定理を適用して,

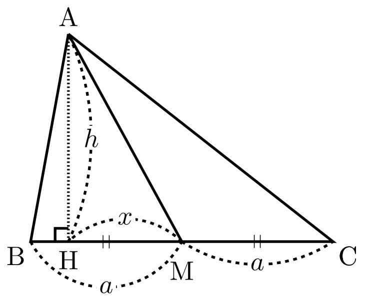
$$m^2 = (a - x)^2 + h^2$$

よって,　$$\begin{aligned} m^2 + a^2 &= \boldsymbol{(a - x)^2 + h^2 + a^2} \\ &= \boldsymbol{2a^2 - 2ax + x^2 + h^2} \end{aligned}$$

(3),(4) から,　$\boldsymbol{b^2 + c^2 = 2(m^2 + a^2)}$
これで中線定理が証明された.

2. 次の中線定理を証明したい．$\triangle$ABC に対して，M を BC の中点とする．
また，A から辺 BC に下ろした垂線の足を H，BM $=$ CM $= a$，AH $= h$，HM $= x$ とする．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 5 分 ）



★ 中線定理

$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2\left(AM^2 + BM^2\right)}$

☆覚え方

$\angle$AMB $= 90°$ のときをイメージすると，三平方の定理と重なる．

(1) AB^2 を a, h, x で表せ．

三平方の定理から，

$\triangle$ABH $\Rightarrow$ $\mathbf{AB^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x})^2 + \boldsymbol{h}^2}$

(2) AC^2 を a, h, x で表せ．

三平方の定理から，

$\triangle$ACH $\Rightarrow$ $\mathbf{AC^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x})^2 + \boldsymbol{h}^2}$

(3) (1),(2) から，AB^2 + AC^2 を a, h, x で表せ．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 &= (a-x)^2 + (a+x)^2 + 2h^2 \\
&= \boldsymbol{2a^2 + 2x^2 + 2h^2} \\
&= \boldsymbol{2(a^2 + x^2 + h^2)}
\end{aligned}
$$

$\triangle$AMH に三平方の定理を適用して，

$$\mathrm{AM}^2 = x^2 + h^2$$

であるから，(3) から，　$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)}$

これで中線定理が証明された．

☆こちらの x の定義の方が，計算が楽である．真ん中をうまく使うと，図形の対称性と式の対称性がつながる．