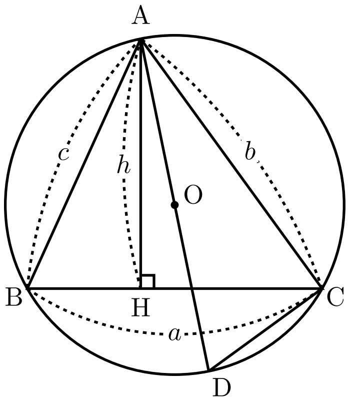
反射テスト　平面図形　証明　外接円の半径・トレミーの定理　01

1.　外接円の半径の公式を証明したい. $\triangle$ABC の面積を S , 外接円の中心を O, 外接円の半径を R とする.
また, BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, AH $= h$ とおく.　（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 15 分 ）



★ 外接円の半径の公式

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4S}} \qquad \textbf{（ただし } \boldsymbol{S = \triangle \mathrm{ABC}} \textbf{）}$$

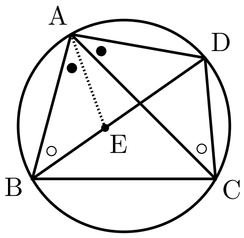
(1)　$\triangle$ABH $\backsim$ $\triangle$ADC を証明せよ.

(2)　(1) の結果を用いて, R を b, c, h で表せ.

(3)　(2) の結果を用いて, R を a, b, c, S で表せ.

2. トレミーの定理を証明したい. 下図のように, 四角形 ABCD に外接円があるとする.

（ S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分 ）



★ トレミーの定理　AB・CD + AD・BC = AC・BD

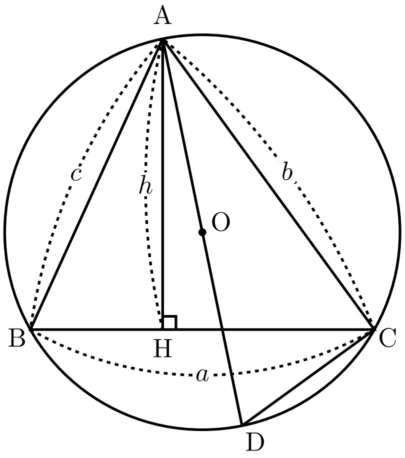
☆覚え方　円の内接四角形において「 対辺の積の和 = 対角線の積 」
☆トレミーとは古代ギリシアの天文学者クラウディオス・プトレマイオスのこと.
そのため, この定理はプトレマイオスの定理とも呼ばれる.

(1)　∠BAE = ∠CAD となるように BD 上に点 E をおく.
△ABE ∽ △ACD　を証明し,
AB・CD = BE・AC　であることを言え.

(2)　もう一組の相似な三角形があることを指摘し, トレミーの定理を証明せよ.

反射テスト　平面図形　証明　外接円の半径・トレミーの定理　01　解答解説

1.　外接円の半径の公式を証明したい. △ABC の面積を S , 外接円の中心を O, 外接円の半径を R とする.
また, BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, AH $= h$ とおく.　（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 15 分 ）



★ 外接円の半径の公式

$$\boldsymbol{R = \frac{abc}{4S}} \qquad \text{（ただし } \boldsymbol{S = \triangle \mathrm{ABC}} \text{）}$$

(1)　△ABH ∽ △ADC を証明せよ.

△OAC　と　△OBC　　において

$\angle$ABH　=　$\angle$ADC　　($\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$の円周角は等しい.)

$\angle$AHB　=　$\angle$ACD　$= 90^\circ$　　(直径 AD の円周角は 90°)

2 組の角がそれぞれ等しいから,

　△ABH ∽ △ADC

(2)　(1) の結果を用いて, R を b, c, h で表せ.

相似比から,

　　AB : AH = AD : AC

$\Rightarrow$　$c : h = 2R : b$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{R = \frac{bc}{2h}}$　　$\because\ h \neq 0$

(3)　(2) の結果を用いて, R を a, b, c, S で表せ.

$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{ah}{2}$ であるから, $a \neq 0$ より,

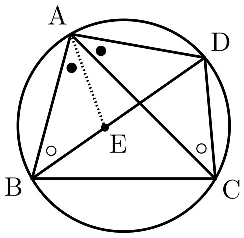
　$h = \dfrac{2S}{a}$

これを (2) に代入すれば,

$$\begin{aligned} R &= \frac{bc}{2} \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{bc}{2} \times \frac{a}{2S} \\ &= \boldsymbol{\frac{abc}{4S}} \qquad \because\ S \neq 0 \end{aligned}$$

2.　トレミーの定理を証明したい. 下図のように, 四角形 ABCD に外接円があるとする.

(S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 15 分)



★ トレミーの定理　AB・CD＋AD・BC＝AC・BD

☆覚え方　円の内接四角形において「 対辺の積の和＝対角線の積 」
☆トレミーとは古代ギリシアの天文学者クラウディオス・プトレマイオスのこと.
そのため, この定理はプトレマイオスの定理とも呼ばれる.

(1)　$\angle BAE = \angle CAD$ となるように BD 上に点 E をおく.
$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$　を証明し,
$AB \cdot CD = BE \cdot AC$　であることを言え.

$\triangle ABE$　と　$\triangle ACD$　において

$\angle ABE = \angle ACD$　($\overset{\frown}{AD}$の円周角は等しい.)
$\angle BAE = \angle CAD$　(仮定)

よって, 2 組の角がそれぞれ等しいから,
$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$

$\Rightarrow$　$AB : BE = AC : CD$
$\Leftrightarrow$　$AB \cdot CD = BE \cdot AC$　…①

(2)　もう一組の相似な三角形があることを指摘し, トレミーの定理を証明せよ.

$\triangle AED$　と　$\triangle ABC$　において

$\angle EDA = \angle BCA$　($\overset{\frown}{AB}$の円周角は等しい.)

$$\begin{aligned} \angle EAD &= \angle EAC + \angle CAD \\ &= \angle EAC + \angle BAE \quad (\text{仮定}) \\ &= \angle BAC \end{aligned}$$

よって, 2 組の角がそれぞれ等しいから,
$\triangle AED \backsim \triangle ABC$

$\Rightarrow$　$BC : CA = ED : DA$
$\Leftrightarrow$　$BC \cdot DA = CA \cdot ED$　…②

∴　作った 2 つの等式①, ②の両辺の和から

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= (BE + ED) \cdot AC \\ &= AC \cdot BD \end{aligned}$$