反射テスト　平面図形　証明　2円　04　難

1.　小円が大円に点 T で内接していて, 大円周上に点 A,B をとると, 線分 AB が小円と点 E で接した. TA,TB と小円との交点をそれぞれ C,D とするとき, 次の問に答えよ.　（ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 20 分, C 級 30 分 ）

（1）　AB // CD を証明せよ.

（2）　TE が ∠ATB を二等分することを証明せよ.

（3）　TA $=15$, TB $=12$, AB $=9$ のとき, 小円と大円の面積比を求めよ.

2.　2 つの円が点 T で外接していて, 大円周上に点 A,B がある. 直線 AT と小円の交点のうち T ではない方を C, 直線 BT と小円の交点のうち T ではない方を D とすると, 直線 CD が大円に接し, その接点を E とした. 次の問に答えよ.

（ S 級 10 分, A 級 20 分, B 級 40 分, C 級 1 時間 ）

(1)　AB // DC を証明せよ.

(2)　TE が ∠CTB を二等分することを証明せよ.

(3)　$\mathrm{TA} = 6$, $\mathrm{TB} = 15$, $\mathrm{CD} = 3\sqrt{10}$ のとき, 小円と大円の面積比を求めよ.

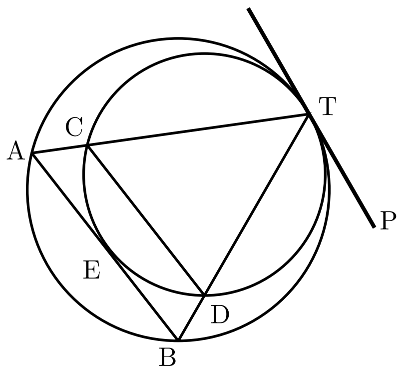
反射テスト　平面図形　証明　2円　04　難　解答解説

1.　小円が大円に点 T で内接していて, 大円周上に点 A,B をとると, 線分 AB が小円と点 E で接した. TA,TB と小円との交点をそれぞれ C,D とするとき, 次の問に答えよ.　（ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 20 分, C 級 30 分 ）

(1)　AB // CD を証明せよ.

(2)　TE が ∠ATB を二等分することを証明せよ.

(3)　TA = 15 , TB = 12 , AB = 9 のとき, 小円と大円の面積比を求めよ.



(1)

★ 接線の補助線

T での接線を描き, 図のように接線上に点 P を定める.

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{TAB} &= \angle \mathrm{BTP} &&（大円に接弦定理を適用.）\\ &= \angle \mathrm{TCD} &&（小円に接弦定理を適用.）\end{aligned}$$

同位角が等しいから, AB // CD

(2)

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{ETA} &= \angle \mathrm{ETC} &&（共通.）\\ &= \angle \mathrm{EDC} &&（小円\overset{\frown}{\mathrm{CE}}の円周角は等しい.）\\ &= \angle \mathrm{BED} &&（\mathrm{AB} \,/\!/\, \mathrm{CD}\ より錯角は等しい.）\\ &= \angle \mathrm{ETD} &&（小円に接弦定理を適用.）\\ &= \angle \mathrm{ETB} &&（共通.）\end{aligned}$$

以上から, ET は ∠ATB の二等分線である.

(3)

(2) から, ★ 内角の二等分線と線分比の関係 より, EA : EB = TA : TB = 15 : 12 = 5 : 4

よって　$\mathrm{AE} = \dfrac{5}{5+4}\mathrm{AB} = \dfrac{5}{9} \times 9 = 5$

小円に方べきの定理を適用し,

$$\begin{aligned} & \mathrm{AC} \times \mathrm{AT} = \mathrm{AE}^2 \\ \Rightarrow\ & \mathrm{AC} \times 15 = 5^2 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{AC} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

また, △TCD ∽ △TAB であり, その相似比は,

$\mathrm{TC} : \mathrm{TA} = \left(15 - \dfrac{5}{3}\right) : 15 = 8 : 9$

小円, 大円はそれぞれ △TCD, △TAB の外接円.

小円と大円の相似比も 8 : 9 であるから, 面積比は　$8^2 : 9^2 = \mathbf{64 : 81}$

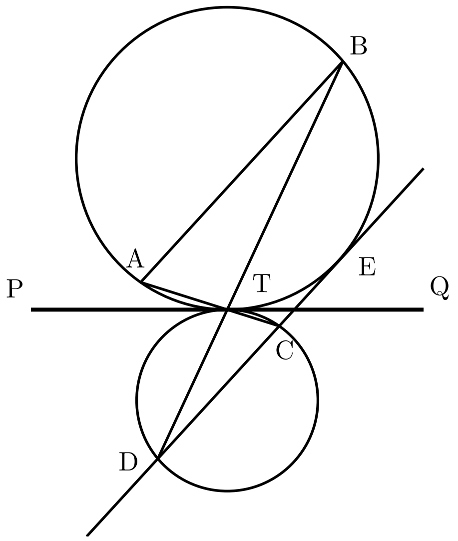
2. 2つの円が点 T で外接していて, 大円周上に点 A,B がある. 直線 AT と小円の交点のうち T ではない方を C, 直線 BT と小円の交点のうち T ではない方を D とすると, 直線 CD が大円に接し, その接点を E とした. 次の問に答えよ.

(S 級 10 分, A 級 20 分, B 級 40 分, C 級 1 時間)

(1) AB // DC を証明せよ.

(2) TE が ∠CTB を二等分することを証明せよ.

(3) TA = 6 , TB = 15 , CD = $3\sqrt{10}$ のとき, 小円と大円の面積比を求めよ.



★ 接線の補助線

T での接線を描き, 図のように接線上に点 P,Q を定める.

(1)

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{TAB} &= \angle \mathrm{BTQ} && \text{(大円に接弦定理を適用.)} \\ &= \angle \mathrm{DTP} && \text{(対頂角は等しい.)} \\ &= \angle \mathrm{TCD} && \text{(小円に接弦定理を適用.)} \end{aligned}$$

錯角が等しいから, AB // CD

(2)

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{ETB} &= \angle \mathrm{EAB} && \text{(大円}\overset{\frown}{\mathrm{BE}}\text{の円周角は等しい.)} \\ &= \angle \mathrm{AEC} && \text{(AB // CD より錯角は等しい.)} \\ &= \angle \mathrm{ABE} && \text{(大円に接弦定理を適用.)} \\ &= \angle \mathrm{ETC} && \text{(大円に内接する四角形 ATEB の対角の外角.)} \end{aligned}$$

以上から, ET は ∠BTE の二等分線である.

(3)

AB // DC から, △TAB ∽ △TCD

よって, TD : TC = TB : TA = 15 : 6 = 5 : 2

(2) から, ★ 外角の二等分線と線分比の関係 より, ED : EC = TD : TC = 5 : 2

よって　ED : CD = 5 : (5 − 2) = 5 : 3

$\Rightarrow \quad \mathrm{ED} = \dfrac{5}{3}\mathrm{CD} = 5\sqrt{10}$.

DT = x とおいて, 大円に方べきの定理を適用すると,

$$\begin{aligned} & \mathrm{DT} \times \mathrm{DB} = \mathrm{DE}^2 \\ \Rightarrow \quad & x \times (x+15) = \left(5\sqrt{10}\right)^2 \end{aligned}$$

この 2 次方程式を整理して解くと, $x^2 + 15x - 250 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -25, 10$

$x > 0$ より, $x = 10$

ゆえに, △TCD ∽ △TAB であり, その相似比は,

TD : TB = 10 : 15 = 2 : 3

小円, 大円はそれぞれ △TCD, △TAB の外接円.

小円と大円の相似比も 2 : 3 であるから, 面積比は　$2^2 : 3^2 = \mathbf{4 : 9}$

☆対称性

前ページの 2 円が内接する場合と, このページの 2 円が外接する場合の **対称性** に注目.

内接と外接には本質的な違いがないことに気づいて欲しい.