反射テスト　平面図形　証明　2円　04　難

1.　小円が大円に点 T で内接していて, 大円周上に点 A,B をとると, 線分 AB が小円と点 E で接した. TA,TB と小円との交点をそれぞれ C,D とするとき, 次の問に答えよ.　（ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 20 分, C 級 30 分 ）

（1）　AB // CD を証明せよ.

（2）　TE が ∠ATB を二等分することを証明せよ.

（3）　TA $= 15$, TB $= 12$, AB $= 9$ のとき, 小円と大円の面積比を求めよ.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 2 つの円が点 T で外接していて, 大円周上に点 A,B がある. 直線 AT と小円の交点のうち T ではない方を C, 直線 BT と小円の交点のうち T ではない方を D とすると, 直線 CD が大円に接し, その接点を E とした. 次の問に答えよ.

(S 級 10 分, A 級 20 分, B 級 40 分, C 級 1 時間)

(1) AB // DC を証明せよ.

(2) TE が ∠CTB を二等分することを証明せよ.

(3) $\mathrm{TA} = 6$, $\mathrm{TB} = 15$, $\mathrm{CD} = 3\sqrt{10}$ のとき, 小円と大円の面積比を求めよ.

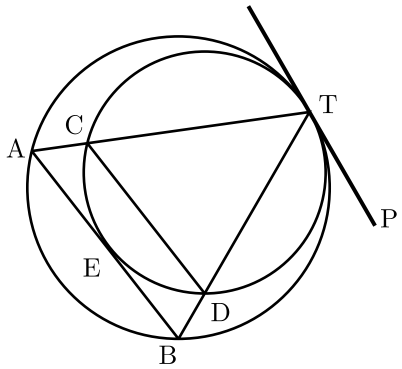
ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

1.　小円が大円に点 T で内接していて, 大円周上に点 A,B をとると, 線分 AB が小円と点 E で接した. TA,TB と小円との交点をそれぞれ C,D とするとき, 次の問に答えよ.　（ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 20 分, C 級 30 分 ）

(1)　AB // CD を証明せよ.

(2)　TE が ∠ATB を二等分することを証明せよ.

(3)　TA = 15 , TB = 12 , AB = 9 のとき, 小円と大円の面積比を求めよ.



(1)

★ 接線の補助線

T での接線を描き, 図のように接線上に点 P を定める.

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{TAB} &= \angle\mathrm{BTP} && \text{（ 大円に接弦定理を適用. ）} \\ &= \angle\mathrm{TCD} && \text{（ 小円に接弦定理を適用. ）} \end{aligned}$$

同位角が等しいから, AB // CD

(2)

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{ETA} &= \angle\mathrm{ETC} && \text{（ 共通. ）} \\ &= \angle\mathrm{EDC} && \text{（ 小円}\overset{\frown}{\mathrm{CE}}\text{の円周角は等しい. ）} \\ &= \angle\mathrm{BED} && \text{（ AB // CD より錯角は等しい. ）} \\ &= \angle\mathrm{ETD} && \text{（ 小円に接弦定理を適用. ）} \\ &= \angle\mathrm{ETB} && \text{（ 共通. ）} \end{aligned}$$

以上から, TE は ∠ATB の二等分線である.

(3)

(2) から, ★ 内角の二等分線と線分比の関係 より, EA : EB = TA : TB = 15 : 12 = 5 : 4

よって　$\mathrm{AE} = \dfrac{5}{5+4}\mathrm{AB} = \dfrac{5}{9} \times 9 = 5$

小円に方べきの定理を適用し,

$$\begin{aligned} & \mathrm{AC} \times \mathrm{AT} = \mathrm{AE}^2 \\ \Rightarrow\ & \mathrm{AC} \times 15 = 5^2 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{AC} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

また, △TCD ∽ △TAB であり, その相似比は,

$$\mathrm{TC} : \mathrm{TA} = \left(15 - \frac{5}{3}\right) : 15 = 8 : 9$$

小円, 大円はそれぞれ △TCD, △TAB の外接円.

小円と大円の相似比も 8 : 9 であるから, 面積比は　$8^2 : 9^2 =$ **64 : 81**

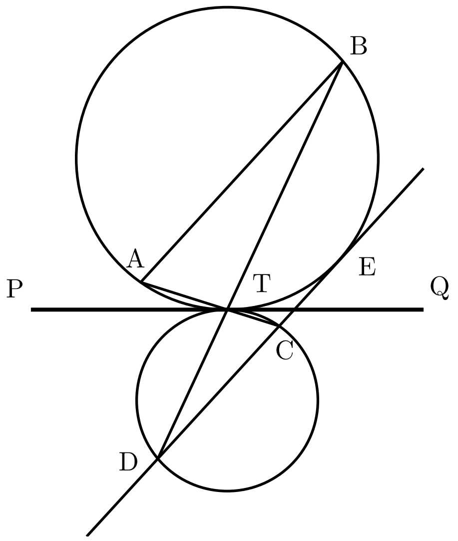
2. 2つの円が点Tで外接していて, 大円周上に点A,Bがある. 直線ATと小円の交点のうちTではない方をC, 直線BTと小円の交点のうちTではない方をDとすると, 直線CDが大円に接し, その接点をEとした. 次の問に答えよ.

(S 級10分, A 級20分, B 級40分, C 級1時間)

(1) AB // DC を証明せよ.

(2) TE が ∠CTB を二等分することを証明せよ.

(3) TA = 6 , TB = 15 , CD = $3\sqrt{10}$ のとき, 小円と大円の面積比を求めよ.



★ 接線の補助線

Tでの接線を描き, 図のように接線上に点P,Qを定める.

(1)

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{TAB} &= \angle \mathrm{BTQ} && (\text{大円に接弦定理を適用.}) \\ &= \angle \mathrm{DTP} && (\text{対頂角は等しい.}) \\ &= \angle \mathrm{TCD} && (\text{小円に接弦定理を適用.}) \end{aligned}$$

錯角が等しいから, AB // CD

(2)

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{ETB} &= \angle \mathrm{EAB} && (\text{大円}\overset{\frown}{\mathrm{BE}}\text{の円周角は等しい.}) \\ &= \angle \mathrm{AEC} && (\mathrm{AB} \,//\, \mathrm{CD}\text{ より錯角は等しい.}) \\ &= \angle \mathrm{ABE} && (\text{大円に接弦定理を適用.}) \\ &= \angle \mathrm{ETC} && (\text{大円に内接する四角形 ATEB の対角の外角.}) \end{aligned}$$

以上から, TE は ∠CTB の二等分線である.

(3)

AB // DC から, △TAB ∽ △TCD

よって, TD : TC = TB : TA = 15 : 6 = 5 : 2

(2) から, ★ 外角の二等分線と線分比の関係 より, ED : EC = TD : TC = 5 : 2

よって　ED : CD = 5 : (5 − 2) = 5 : 3

$\Rightarrow \quad \mathrm{ED} = \dfrac{5}{3}\mathrm{CD} = 5\sqrt{10}$.

DT = x とおいて, 大円に方べきの定理を適用すると,

$$\begin{aligned} \mathrm{DT} \quad \times \quad \mathrm{DB} \quad &= \quad \mathrm{DE}^2 \\ \Rightarrow \quad x \quad \times \quad (x+15) \quad &= \quad \left(5\sqrt{10}\right)^2 \end{aligned}$$

この2次方程式を整理して解くと, $x^2 + 15x - 250 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -25, 10$

$x > 0$ より, $x = 10$

ゆえに, △TCD ∽ △TAB であり, その相似比は,

TD : TB = 10 : 15 = 2 : 3

小円, 大円はそれぞれ △TCD, △TAB の外接円.

小円と大円の相似比も 2 : 3 であるから, 面積比は　$2^2 : 3^2 = \mathbf{4 : 9}$

☆ 対称性

前ページの2円が内接する場合と, このページの2円が外接する場合の **対称性** に注目.

内接と外接には本質的な違いがないことに気づいて欲しい.

© 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)