反射テスト　平面図形　証明　2円　03　難

1.　平面上にある 2 つの円 O, O′ が 2 点 P, Q で交わっている. 円 O の円周上にあり, 円 O′ の内部 (円周上も含む) にない点 A をとる. 直線 AP と円 O′ との交点のうち点 P ではない方の点を B とする. 同様に直線 AQ と円 O′ との交点のうち点 Q ではない方の点を C とする. そして線分 PC と QB との交点を R とする.

線分 BC が円 O′ の直径になるとき, 点 R が円 O の円周上にあることを証明せよ.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 15 分 ）

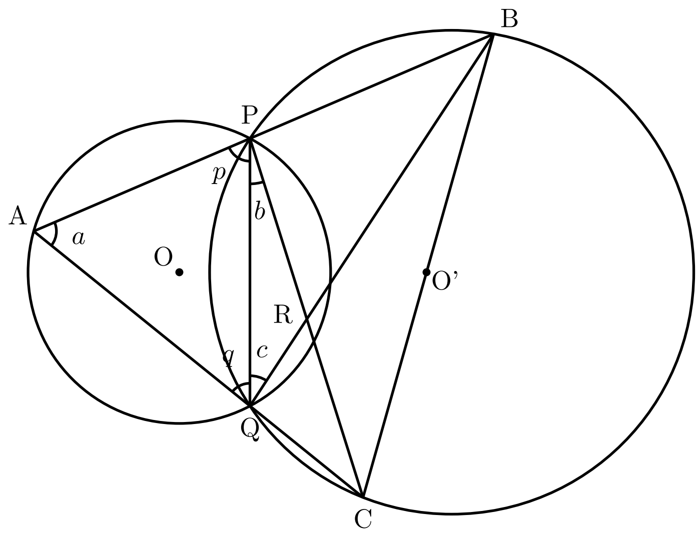
2. 平面上にある 2 つの円 O, O$'$が 2 点 P, Q で交わっている. 円 O の円周上にあり, 円 O$'$の内部 (円周上も含む) にない点 A をとる. 直線 AP と円 O$'$との交点のうち点 P ではない方の点を B とする. 同様に直線 AQ と円 O$'$との交点のうち点 Q ではない方の点を C とする. そして線分 PC と QB との交点を R とする.

点 R が円 O の円周上にあるとき, 線分 BC が円 O$'$の直径になることを証明せよ.

(S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 15 分)

反射テスト　平面図形　証明　2円　03　難　解答解説

1. 　平面上にある 2 つの円 O, O′が 2 点 P, Q で交わっている. 円 O の円周上にあり, 円 O′の内部 (円周上も含む) にない点 A をとる. 直線 AP と円 O′との交点のうち点 P ではない方の点を B とする. 同様に直線 AQ と円 O′との交点のうち点 Q ではない方の点を C とする. そして線分 PC と QB との交点を R とする.
　線分 BC が円 O′の直径になるとき, 点 R が円 O の円周上にあることを証明せよ.
（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 15 分 ）



★ 証明の流れ
　適確な図を描くこと. これはとても難しい作業である. 1 回のトライであきらめてはもったいない. 何回か描いてみて証明しやすいものを探してみよう.

証明
円 O′の半円弧 BC の円周角は 90°であるから, $\angle \mathrm{BPC} = \angle \mathrm{BQC} = 90^\circ$
四角形 AQRP の対角の和は　$\angle \mathrm{RPA} + \angle \mathrm{AQR} = (180 - 90) + (180 - 90) = 180^\circ$
よって, 四角形 AQRP は円に内接する. △APQ の外接円は 1 つしかないので, R も円 O の円周上にある.

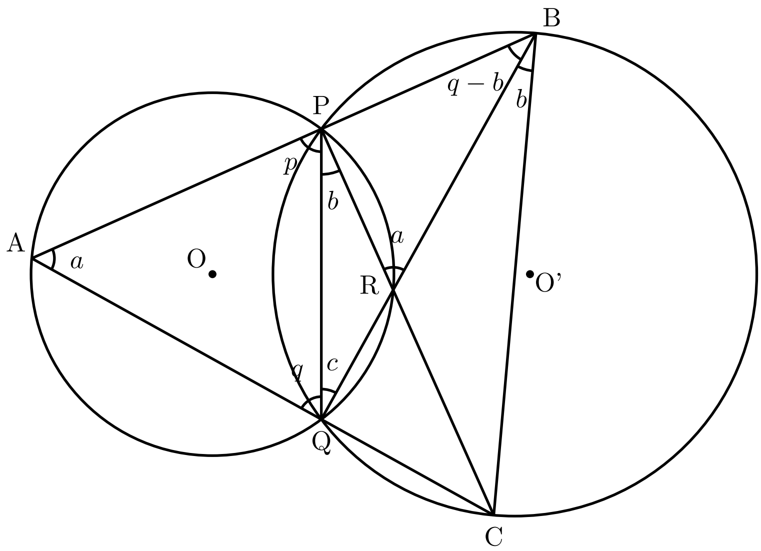
☆別解
必要な道具を用意する. 例えばこの問題なら, 角度 a, b, c, p, q を図のように用意したが, 理由はすぐ下を読んで欲しい.
★ 2 円の補助線　2 円の共通な弦 (上図なら線分 PQ) はとても重要. 両方の円について議論できる材料になるので, 線分 PQ の近くにある角度に名前を付けて証明する.

証明
上図のように, $\angle \mathrm{BAC} = a$, $\angle \mathrm{APQ} = p$, $\angle \mathrm{AQP} = q$, $\angle \mathrm{QPC} = b$, $\angle \mathrm{PQB} = c$ とおく.
BC が円 O の直径であるから, $p + b = q + c = 90^\circ$
四角形 AQRP の対角の和は　$(p + b) + (q + c) = 180^\circ$
よって, 四角形 AQRP は円に内接する.
△AQP の外接円はただ 1 つ円 O しかないから, 四角形 AQRP が内接する円は O である.

2. 平面上にある 2 つの円 O, O′が 2 点 P, Q で交わっている. 円 O の円周上にあり, 円 O′の内部 (円周上も含む) にない点 A をとる. 直線 AP と円 O′との交点のうち点 P ではない方の点を B とする. 同様に直線 AQ と円 O′との交点のうち点 Q ではない方の点を C とする. そして線分 PC と QB との交点を R とする.

点 R が円 O の円周上にあるとき, 線分 BC が円 O′の直径になることを証明せよ.

(S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 15 分)



☆前問の逆を証明する. つまり必要十分条件になる.

証明

四角形 AQRP は円 O に内接するから, $\angle\mathrm{RPA} + \angle\mathrm{AQR} = 180^\circ$

これらの外角は円 O′の円周角で等しいから, 内角も等しく,

$\angle\mathrm{RPA} = \angle\mathrm{AQR} = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$

外角 $\mathrm{BPC} = 180 - 90 = 90^\circ$ となり, 弧 BC の円周角が 90°になるので, BC は円 O′の直径である.

☆別解 **証明**

上図のように, $\angle\mathrm{BAC} = a$, $\angle\mathrm{APQ} = p$, $\angle\mathrm{AQP} = q$, $\angle\mathrm{QPC} = b$, $\angle\mathrm{PQB} = c$ とおく.

四角形 AQRP は円 O に内接するから, 四角形の対角の和は 180° .

よって $(p + b) + (q + c) = 180^\circ$ …①

四角形 AQRP は円 O に内接するから, 外角は対角の内角に等しく, $\angle\mathrm{PRB} = a$

△PQR の外角と内角から $a = b + c$ …②

円 O′に円周角の定理を適用して, $\angle\mathrm{QCB} = b$

円 O′の内接四角形 PQCB から, $\angle\mathrm{CBP} = \angle\mathrm{PQA} = q$

この 2 つから $\angle\mathrm{RBP} = q - b$

△PRB の内角・外角に注目して $a + (q - b) = p + b$ …③

③ ⇔ $p + b = a + q - b$

$= (b + c) + q - b$ ← ②

$= c + q$

①から和が 180°であるから, $p + b = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$

弧 BC の円周角 $\angle\mathrm{BPC} = 180^\circ - (p + b) = 90^\circ$ ⇒ 弦 BC は円 O′の直径である.