

反射テスト 平面図形 証明 四角形 0803

1. 「四角形 ABCD が長方形であるならば、2つの対角線の長さは等しいこと」を図形の合同を用いて証明せよ。
(S 級 2 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 7 分)

2. 「平行四辺形 ABCD において, 2 つの対角線の長さが等しいとき, 平行四辺形 ABCD が長方形になること」を図形の合同を用いて証明せよ.
(S 級 3 分, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 7 分)

反射テスト 平面図形 証明 四角形 0803 解答解説

1. 「四角形 ABCD が長方形であるならば、2つの対角線の長さは等しいこと」を図形の合同を用いて証明せよ。

(S 級 2分 40秒, A 級 4分, B 級 6分, C 級 7分)

★長方形の定義と性質

定義 4つの角が全て等しい四角形.

性質① 平行四辺形の定義・性質は全て成立.

性質② 2つの対角線の長さは等しい.

☆ここでは「長方形⇒性質②」が成り立つ事を証明するのがテーマである.

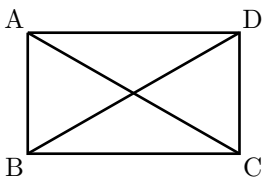
注意点としては、上の性質②を用いて証明してはいけない. 性質②は結論である. それを証明したいのに、性質②を利用しては「結論先にありき」で証明とは言えない. これを **循環論法** という.

長方形であることを用いるのはもちろんだが、2つの対角線の長さが等しいかどうかは最後までわからないものとして証明する必要がある.

☆証明の骨子

★「図形の基本は三角形」 下図において $AC = BD$ を証明したい. そこで考えるべきことは、 AC を1辺とする三角形と、 BD を1辺とする三角形の合同を考えることである. 下では、 $\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ について考えているが、 $\triangle ABC$ と $\triangle BAD$ について考えてもいいし、 $\triangle DCB$ と $\triangle CDA$ について考えてもいい.

証明



$\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において、

$$AB = DC \quad (\text{長方形は平行四辺形だから、対辺は等しい})$$

$$\angle ABC = \angle DCB \quad (\text{長方形の4つの角は全て等しい})$$

$$BC = CB \quad (\text{共通})$$

よって2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$

対応する辺の長さは等しいから $AC = DB$

ゆえに長方形 ABCD の対角線 AC と DB は等しい.

☆図示 ここでは証明に必要な図を描くことも重要なテーマである.

2. 「平行四辺形 ABCD において、2つの対角線の長さが等しいとき、平行四辺形 ABCD が長方形になること」を図形の合同を用いて証明せよ。
(S 級 3 分, A 級 4 分 30 秒, B 級 6 分, C 級 7 分)

★長方形の定義と性質

定義 4つの角が全て等しい四角形.

性質① 平行四辺形の定義・性質は全て成立.

性質② 2つの対角線の長さは等しい.

☆平行四辺形において「性質②⇒長方形」が成り立つ事を証明するのがテーマである.

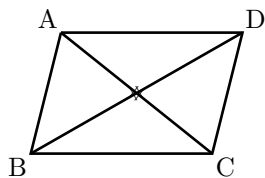
注意点としては、上の「長方形の定義」を用いて証明してはいけない. ここでは「長方形の定義」は結論である.

☆証明の骨子

★「図形の基本は三角形」 下図において平行四辺形の内角が全て等しいことを言いたい.

平行四辺形の対角は等しいから、となりあう角が等しいことを言えばいい. どの組み合わせでもいいので、ここでは $\angle ABC = \angle DCB$ を証明しよう. そこで考えるべきことは、 $\angle ABC$ を用いる三角形と、 $\angle DCB$ を用いる三角形の合同を見つけることである. 下の証明では、 $\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ について考えた. もちろん $\triangle ABC$ と $\triangle BAD$ について考えてもいいし、 $\triangle DCB$ と $\triangle CDA$ について考えてもいい.

証明



$\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において、

$AB = DC$ (平行四辺形の対辺は等しい)

$AC = DB$ (仮定)

$BC = CB$ (共通)

よって3組の辺がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$

対応する角は等しいから $\angle ABC = \angle DCB$

平行四辺形の2組の対角は等しいから、四角形の4つの角は全て等しい.

ゆえに平行四辺形 ABCD は **長方形** である.