反射テスト　平面図形　描画　入試問題　02

1. 　$\angle \mathrm{A} = 45^\circ$ の鋭角 $\triangle \mathrm{ABC}$ がある．点 A, B から対辺へ垂線を引き，その足をそれぞれ D, E，AD と BE との交点を F とするとき，次の問に答えよ．　（ S 級 4 分 20 秒，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 12 分 ）

(1)　$\triangle \mathrm{AFE}$ と合同な三角形は何か答えよ．

(2)　(1) を証明せよ．

(3)　$\mathrm{BD} = 3,\ \mathrm{DC} = 2$ であると，FD の長さを求めよ．

2. 中心 O, 直径 AB の円 O がある. まず $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上に $\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ となる点 C をとる. 次に, 半直線 AC 上に D をとると, 線分 BD と $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ が交わった. この交点を E, 線分 AE と線分 BC との交点を F として, 次の問に答えよ.

(S 級 4 分 20 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分)

(1) $\triangle$BDC と合同な三角形は何か答え, それを証明せよ.

(2) $\mathrm{BE} = 2$, $\mathrm{ED} = 3$ であると, FE の長さを求めよ.

(3) AC, CD の長さをそれぞれ求めよ.

(4) CE の長さを求めよ.

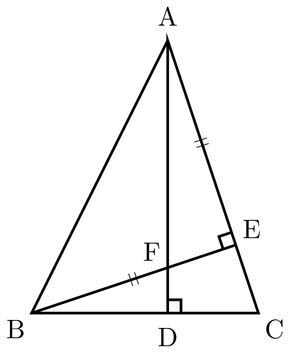
反射テスト　平面図形　描画　入試問題　02　解答解説

1.　$\angle A = 45°$ の鋭角 $\triangle ABC$ がある．点 A, B から対辺へ垂線を引き，その足をそれぞれ D, E，AD と BE との交点を F とするとき，次の問に答えよ．（ S 級 4 分 20 秒，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 12 分 ）

(1)　$\triangle AFE$ と合同な三角形は何か答えよ．

(2)　(1) を証明せよ．

(3)　$BD = 3,\ DC = 2$ であると，FD の長さを求めよ．



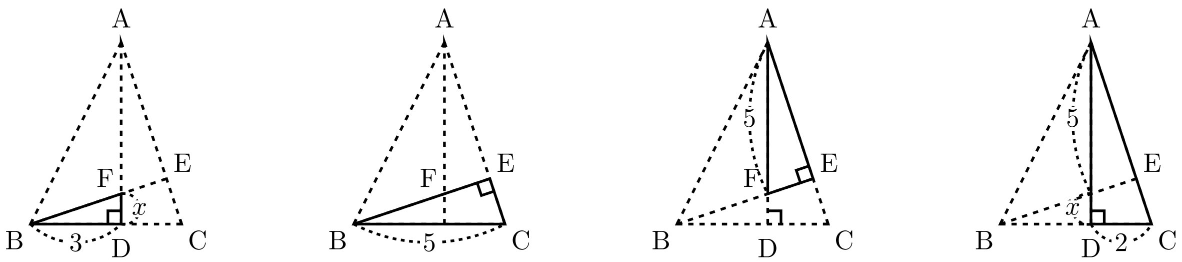
★ わかることは全て書き込む
$\triangle ABE$ が直角二等辺三角形になることがわかれば，
$EA = EB$ の等辺記号を書き込める．

★ 図形の基本は三角形
合同は必ず等辺を示唆する必要があるから，
EA, EB をそれぞれ 1 辺とする三角形を考える．

(1)　$\boldsymbol{\triangle BCE} \equiv \triangle AFE$

(2)　$\triangle BCE$ と $\triangle AFE$ について考える．
$\angle FAE = a°$ とおくと，
$\triangle ACD$ の内角の和から $\angle ACB = (90 - a)°$
$\triangle BCE$ の内角の和から $\angle CBE = 180° - \{90° + (90 - a)°\} = a°$
よって，$\angle CBE = \angle FAE$　…①
また仮定から，$\angle BEC = \angle AEF = 90°$　…①
仮定から $\angle BAE = 45°$ なので，$\angle EBA = 180° - 90° - 45° = 45°$．
つまり $\triangle EAB$ は直角二等辺三角形なので，$EB = EA$　…③
以上から，二角夾辺相等より $\triangle BCE \equiv \triangle AEF$ である．

(3)　**★ わかることは全て書き込む**
(2) から，$AF = BC = BD + DC = 3 + 2 = 5$
★ 図形の基本は三角形
(2) から，$a°, (90 - a)°, 90°$ の直角三角形が 4 つあることがわかる．
$\triangle BFD \backsim \triangle BCE \equiv \triangle AEF \backsim \triangle ACD$
求めたい FD の長さを x とおくと，このうち二辺の長さが分かっているものは…



$\triangle BFD \backsim \triangle ACD$ この 2 つの三角形は二辺の長さが分かっている．(x で表すことも含めて**「分かっている」**ということ)
よって方程式を作ることができる．
$BD : DF = AD : DC \Rightarrow \quad 3 : x = (5 + x) : 2 \quad \Leftrightarrow \quad x(5 + x) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 5x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 6)(x - 1) = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = -6, 1$　　　$x > 0$ であるから，$x = 1$　　　**FD = 1**

2. 中心 O, 直径 AB の円 O がある．まず $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上に $\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ となる点 C をとる．次に，半直線 AC 上に D をとると，線分 BD と $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ が交わった．この交点を E，線分 AE と線分 BC との交点を F として，次の問に答えよ．

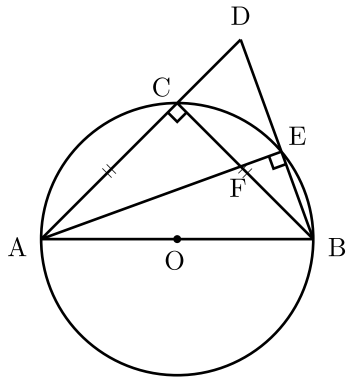
（ S 級 4 分 20 秒，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 12 分 ）

(1) △BDC と合同な三角形は何か答え，それを証明せよ．

(2) $\mathrm{BE} = 2,\ \mathrm{ED} = 3$ であると，FE の長さを求めよ．

(3) AC, CD の長さをそれぞれ求めよ．

(4) CE の長さを求めよ．



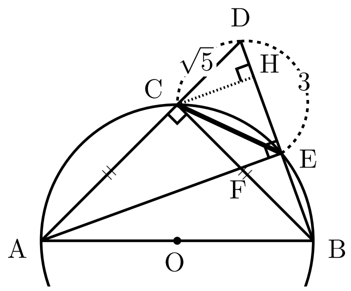
★ わかることは全て書き込む
△ABE が直角二等辺三角形になることがわかれば，
EA = EB の等辺記号を書き込める．

★ 図形の基本は三角形
合同は必ず等辺を示唆する必要があるから，
EA, EB をそれぞれ 1 辺とする三角形を考える．

(1) **△AFC** ≡ △BDC
△AFC と △BDC について考える．
$\overset{\frown}{\mathrm{CE}}$ に円周角の定理を適用して，$\angle\mathrm{FAC} = \angle\mathrm{DBC}$
半円の $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に円周角の定理を適用して，$\angle\mathrm{AEC} = \angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$
仮定から $\overset{\frown}{\mathrm{CA}} = \overset{\frown}{\mathrm{CB}}$ なので，弦 CA = 弦 CB．
以上から，二角夾辺相等より △BCE ≡ △AEF である．

(2) (1) から，$\mathrm{AF} = \mathrm{BD} = \mathrm{BE} + \mathrm{ED} = 2 + 3 = 5$
★ 図形の基本は三角形　△BFE ∽ △BDC ≡ △AFC ∽ △ADE
求めたい FE の長さを x とおくと，このうち二辺の長さが分かっているものは，△BFE ∽ △ADE．
この 2 つの三角形は二辺の長さが分かっている．(x で表すことも含めて **「分かっている」** ということ)
$\mathrm{BE} : \mathrm{FE} = \mathrm{AE} : \mathrm{DE} \Rightarrow \quad 2 : x = (5+x) : 3 \quad \Leftrightarrow \quad x(5+x) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 5x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad (x+6)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = -6, 1$　　　$x > 0$ であるから，$x = 1$　　　　**FE = 1**

(3) △BFE に三平方の定理を適用して，$\mathrm{BF} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
(2) で上げた 4 つの三角形の三辺比は，$1 : 2 : \sqrt{5}$．
△AFC から，$\mathrm{AC} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{AF} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \times 5 = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$
△BDC から，$\mathrm{CD} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{AF} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times 5 = \boldsymbol{\sqrt{5}}$



(4) C から BD に垂線を下ろし，その足を H とする．
△CDH ∽ △ADE であるから，この △CDH の三辺比も $1 : 2 : \sqrt{5}$．
$\mathrm{CD} = \sqrt{5}$ であるから，$\mathrm{CH} = 2$，$\mathrm{DH} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HE} = 3 - 1 = 2$
△CEH が直角二等辺三角形であることがわかるので，
$$\mathrm{CE} = \frac{\sqrt{2}}{1}\mathrm{CH} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$