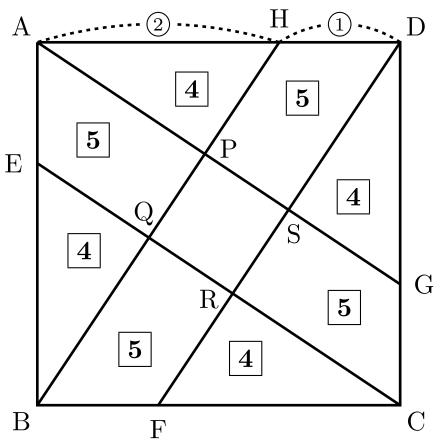
反射テスト　平面図形　描画　入試問題　01

1.　一辺 26cm の正方形 ABCD があって，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を E，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を F，辺 CD を 1 : 2 に内分する点を G，辺 DA を 1 : 2 に内分する点を H とする．GA と HB との交点を P，HB と EC との交点を Q，EC と FD との交点を R，FD と GA との交点を S とする．四角形 PQRS の面積を求めよ．（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

2. 一辺 25cm の正方形 ABCD があって, 辺 AB を 2 : 1 に内分する点を E, 辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F, 辺 CD を 2 : 1 に内分する点を G, 辺 DA を 2 : 1 に内分する点を H とする. GA と HB との交点を P, HB と EC との交点を Q, EC と FD との交点を R, FD と GA との交点を S とする. 四角形 PQRS の面積を求めよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

反射テスト　平面図形　描画　入試問題　01　解答解説

1.　一辺 26cm の正方形 ABCD があって，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を E，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を F，辺 CD を 1 : 2 に内分する点を G，辺 DA を 1 : 2 に内分する点を H とする．GA と HB との交点を P，HB と EC との交点を Q，EC と FD との交点を R，FD と GA との交点を S とする．四角形 PQRS の面積を求めよ．（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）



☆解法 1

△APH ∽ △ASD

相似比 AH : AD = 2 : 3　⇒　面積比 4 : 9

ゆえに左図のようになる．

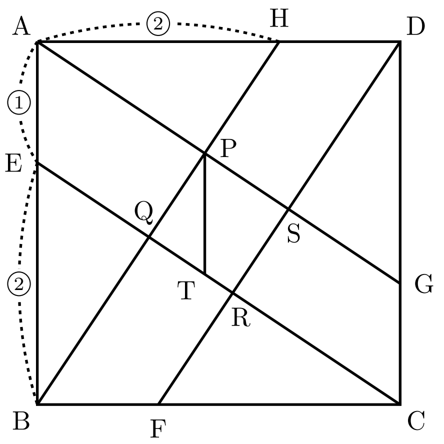
$\triangle \mathrm{AGD} = \boxed{4} + \boxed{5} + \boxed{4} = \boxed{13}$

これは正方形 ABCD の面積の $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

ゆえに，正方形 ABCD の面積は $\boxed{13} \div \dfrac{1}{3} = \boxed{39}$

∴　正方形 PQRS $= \boxed{39} - \left(\boxed{4} + \boxed{5}\right) \times 4 = \boxed{3}$

正方形 PQRS $= 26^2 \times \dfrac{3}{39} = \mathbf{52\,cm^2}$



☆解法 2

P を通って AB に平行な直線と線分 QR との交点を T とする．

△PQT ∽ △BAH

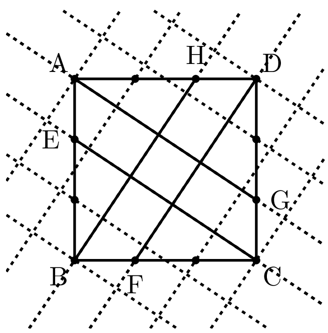
相似比　$\mathrm{PT} : \mathrm{BH} = \mathrm{AE} : \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{AB}^2}$

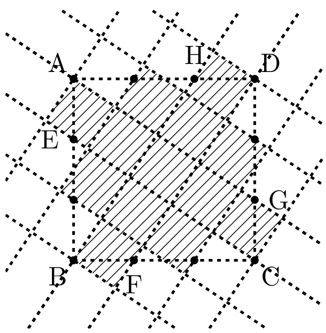
$= ① : \sqrt{②^2 + ③^2} = 1 : \sqrt{13}$

ゆえに，$\mathrm{PQ} : \mathrm{BA} = 1 : \sqrt{13}$ だから，

正方形 PQRS : 正方形 ABCD $= 1^2 : \left(\sqrt{13}\right)^2 = 1 : 13$

∴　正方形 PQRS $= 26^2 \times \dfrac{1}{13} = \mathbf{52\,cm^2}$





☆解法 3　**★ 対称性の補助線⇒等積変形**

左図から，正方形 ABCD は正方形 PQRS 13 個分．

正方形 PQRS $= 26^2 \times \dfrac{1}{13} = \mathbf{52\,cm^2}$

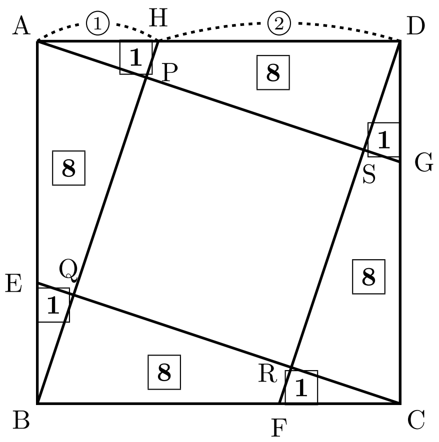
☆他のアイデア

☆解法 4(解析学)　BA を y 軸，BC を x 軸として，B を原点，C(26, 0) とする．直線の方程式から交点 P, Q の座標を求め，線分 PQ の長さを求める．

☆解法 5(線形代数学)　ベクトルを用いる．

☆解法 6(複素解析学)　複素平面を用いる．

2. 一辺 25cm の正方形 ABCD があって，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を E, 辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F, 辺 CD を 2 : 1 に内分する点を G, 辺 DA を 2 : 1 に内分する点を H とする．GA と HB との交点を P, HB と EC との交点を Q, EC と FD との交点を R, FD と GA との交点を S とする．四角形 PQRS の面積を求めよ．（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



☆解法 1

△APH ∽ △ASD

相似比 AH : AD = 1 : 3 ⇒ 面積比 1 : 9

ゆえに左図のようになる．

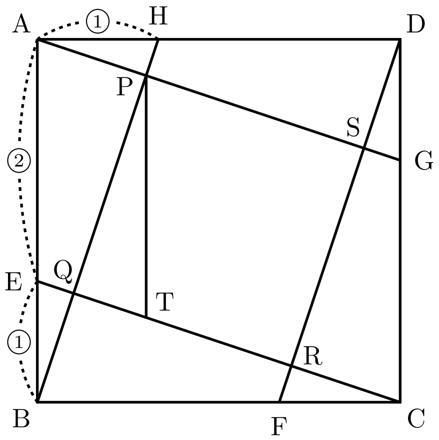
$\triangle\mathrm{AGD} = \boxed{1} + \boxed{8} + \boxed{1} = \boxed{10}$

これは正方形 ABCD の面積の $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

ゆえに，正方形 ABCD の面積は $\boxed{10} \div \dfrac{1}{6} = \boxed{60}$

$\therefore$ 正方形 PQRS $= \boxed{60} - \left(\boxed{1} + \boxed{8}\right) \times 4 = \boxed{24}$

正方形 PQRS $= 25^2 \times \dfrac{24}{60} = \mathbf{250\,cm^2}$



☆解法 2

P を通って AB に平行な直線と線分 QR との交点を T とする．

△PQT ∽ △BAH

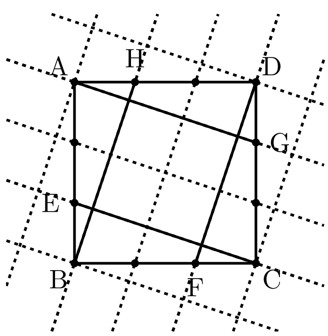
相似比 $\mathrm{PT : BH = AE} : \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{AB}^2}$

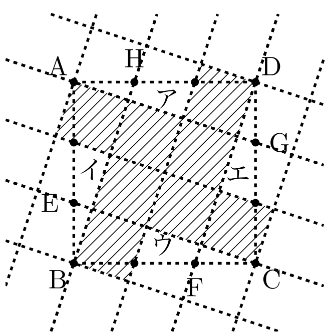
$= ② : \sqrt{①^2 + ③^2} = 2 : \sqrt{10}$

ゆえに，$\mathrm{PQ : BA} = 2 : \sqrt{10}$ だから，

正方形 PQRS : 正方形 ABCD $= 2^2 : \left(\sqrt{10}\right)^2 = 4 : 10 = 2 : 5$

$\therefore$ 正方形 PQRS $= 25^2 \times \dfrac{2}{5} = \mathbf{250\,cm^2}$





☆解法 3 **★ 対称性の補助線⇒等積変形**

正方形 ABCD は斜線部とア〜エに等積変形できる．

アをエの右に，イをウの下に動かせば，正方形 ABCD は小さい正方形 10 個分に相当する．

正方形 PQRS は小さい正方形 4 個分だから，

正方形 PQRS $= 25^2 \times \dfrac{4}{10} = \mathbf{250\,cm^2}$

☆他のアイデア

☆解法 4(解析学) BA を y 軸, BC を x 軸として，B を原点, C(25, 0) とする．直線の方程式から交点 P, Q の座標を求め，線分 PQ の長さを求める．

☆解法 5(線形代数学) ベクトルを用いる．

☆解法 6(複素解析学) 複素平面を用いる．

☆数学には色々な解法がある．色々な解法の元になっている考え方が互いにつながっていることを実感してほしい．