

反射テスト 整数 最大公約数からの逆算 02

1. 2つの整数 m, n があり, 最小公倍数は 195, 積が 585 である. このような2つの整数の組 (m, n) を全て答えよ. ただし $m < n$.
(S 級 45 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分)

2. 2つの整数 m, n があり, 最小公倍数は 315, 積が 2205 である. このような 2つの整数の組 (m, n) を全て答えよ. ただし $m < n$.
(S 級 1 分, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 40 秒, C 級 6 分)

反射テスト 整数 最大公約数からの逆算 02 解答解説

1. 2つの整数 m, n があり, 最小公倍数は 195, 積が 585 である. このような2つの整数の組 (m, n) を全て答えよ. ただし $m < n$.
(S級 45秒, A級 2分, B級 3分, C級 5分)

★ 整数は因数分解

★ 最大公約数 (GCD) と最小公倍数 (LCM)

A と B の最大公約数を G , 最小公倍数を L とすると,

$$A = Ga, B = Gb, \text{ただし } a \text{ と } b \text{ は互いに素な整数} \quad \text{かつ} \quad L = Gab$$

★互いに素 最大公約数が1

m, n の最大公約数を g とすると, ★互いに素な整数 M, N を用いて $m = gM, n = gN$ とおける.

最小公倍数は $gMN = 195$ 積は $gMgN = 585$

$$\text{よって } \frac{gMgN}{gMN} = \frac{585}{195} \Leftrightarrow g = 3$$

$$gMN = 195 \Rightarrow 3MN = 195 \Leftrightarrow MN = 65 = 5 \times 13$$

★たくさんあるものは表で整理

$m < n$ より $M < N$ だから,

M	1	5
N	65	13

$$(M, N) = (1, 65), (5, 13) \Rightarrow (m, n) = (3, 195), (15, 39)$$

☆別解 (小学生向け)

$$G \mid \frac{m}{M} \frac{n}{N} \quad (M, N \text{ は互いに素})$$

$$G \times M \times N = 195 \quad \text{かつ} \quad G \times M \times G \times N = 585$$

$$\Rightarrow G = 585 \div 195 = 3$$

$$\text{よって, } 3 \times M \times N = 195 \Rightarrow M \times N = 195 \div 3 = 65$$

あとは, 上のように 65 について約数の表を作ればよい.

2. 2つの整数 m, n があり, 最小公倍数は 315, 積が 2205 である. このような2つの整数の組 (m, n) を全て答えよ. ただし $m < n$.
(S級1分, A級2分20秒, B級3分40秒, C級6分)

★ 整数は因数分解

★ 最大公約数 (GCD) と最小公倍数 (LCM)

A と B の最大公約数を G , 最小公倍数を L とすると,

$$A = Ga, B = Gb, \text{ ただし } a \text{ と } b \text{ は 互いに素 な整数} \quad \text{かつ} \quad L = Gab$$

★ 互いに素 最大公約数が 1

m, n の最大公約数を g とすると, ★互いに素 な整数 M, N を用いて $m = gM, n = gN$ とおける.

最小公倍数は $gMN = 315$ 積は $gMgN = 2205$

$$\text{よって } \frac{gMgN}{gMN} = \frac{2205}{315} \Leftrightarrow g = 7$$

$$gMN = 315 \Rightarrow 7MN = 315 \Leftrightarrow MN = 45 = 3^2 \times 5$$

★ たくさんあるものは表で整理

$m < n$ より $M < N$ だから,

M	1	3	5
N	45	15	9

M, N は ★互いに素 であるから, $(M, N) = (3, 15)$ は不適當.

$$(M, N) = (1, 45), (5, 9) \Rightarrow (m, n) = (7, 315), (35, 63)$$

☆別解 (小学生向け)

$$G \begin{array}{l}) m \\ \hline M \end{array} \begin{array}{l} n \\ \hline N \end{array} \quad (M, N \text{ は互いに素})$$

$$G \times M \times N = 315 \quad \text{かつ} \quad G \times M \times G \times N = 2205$$

$$\Rightarrow G = 2205 \div 315 = 7$$

$$\text{よって, } 7 \times M \times N = 2205 \Rightarrow M \times N = 315 \div 7 = 45$$

あとは, 上のように 45 について約数の表を作ればよい.