

反射テスト 整数 最大公約数・最小公倍数からの逆算 01

1. 次の問に答えよ. (S 級 1 分 15 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分)

(1) 最大公約数が 3, 最小公倍数が 54 となる 2 つの自然数をすべて求めよ.

(2) 最大公約数が 3, 和が 24 となる 2 つの自然数をすべて求めよ.

2. 次の問に答えよ。(S 級 1 分 15 秒, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分)

(1) 最大公約数が 6, 最小公倍数が 144 となる 2 つの自然数をすべて求めよ.

(2) 最大公約数が 6, 和が 120 となる 2 つの自然数をすべて求めよ.

反射テスト 整数 最大公約数・最小公倍数からの逆算 01 解答解説

1. 次の問に答えよ。(S級 1分15秒, A級 2分, B級 3分, C級 5分)

★ 整数は因数分解

★ 最大公約数 (GCD) と最小公倍数 (LCM)

A と B の最大公約数を G , 最小公倍数を L とすると,

$$A = Ga, B = Gb, \text{ただし } a \text{ と } b \text{ は互いに素な整数} \quad \text{かつ} \quad L = Gab$$

★ 互いに素 最大公約数が 1

(1) 最大公約数が 3, 最小公倍数が 54 となる 2 つの自然数をすべて求めよ.

求める 2 つの自然数を A, B とおく. ただし $A \leq B$ とする.

題意から $A = 3a, B = 3b$ (a, b は互いに素な整数, かつ $a \leq b$) とおけて,
 $3ab = 54 \Leftrightarrow ab = 18$

18 の約数から, (a, b) の組をしらべていくと,

a	1	2	3
b	18	9	6

a, b が互いに素という条件から, $(a, b) = (3, 6)$ は 3 という公約数をもつために不適当.

$$\therefore (a, b) = (1, 18), (2, 9) \Rightarrow (A, B) = (3a, 3b) = (3, 54), (6, 27)$$

☆別解 (小学生向け)

$$3 \mid \frac{A}{a} \frac{B}{b} \quad (a, b \text{ は互いに素})$$

$$3 \times a \times b = 54 \Rightarrow a \times b = 18$$

あとは, 上のように 18 について約数の表を作ればよい.

(2) 最大公約数が 3, 和が 24 となる 2 つの自然数をすべて求めよ.

2 つの自然数を A, B とおく. ただし $A \leq B$

題意から $A = 3a, B = 3b$ (a, b は互いに素な整数, かつ $a \leq b$) とおけて,
 $3a + 3b = 24 \Leftrightarrow a + b = 8$

和が 8 になる組合せから, (a, b) の組をしらべていくと,

a	1	2	3	4
b	7	6	5	4

a, b が互いに素という条件から, $(a, b) = (2, 6), (4, 4)$ は公約数 2 をもつために不適当.

$$\therefore (a, b) = (1, 7), (3, 5) \Rightarrow (A, B) = (3a, 3b) = (3, 21), (9, 15)$$

2. 次の問に答えよ。(S級1分15秒, A級2分, B級3分, C級5分)

(1) 最大公約数が6, 最小公倍数が144となる2つの自然数をすべて求めよ.

求める2つの自然数を A, B とおく. ただし $A \leq B$ とする.

題意から $A = 6a$ $B = 6b$ (a, b は互いに素な整数, かつ $a \leq b$) とおけて,
 $6ab = 144 \Leftrightarrow ab = 24$

24の約数から, (a, b) の組をしらべていくと,

a	1	2	3	4
b	24	12	8	6

a, b が互いに素という条件から, $(a, b) = (2, 12), (4, 6)$ は公約数2をもつために不適当.

$$\therefore (a, b) = (1, 24), (3, 8) \Rightarrow (A, B) = (6a, 6b) = (6, 144), (18, 48)$$

(2) 最大公約数が6, 和が120となる2つの自然数をすべて求めよ.

2つの自然数を A, B とおく. ただし $A \leq B$

題意から $A = 6a$ $B = 6b$ (a, b は互いに素な整数, かつ $a \leq b$) とおけて,
 $6a + 6b = 120 \Leftrightarrow a + b = 20$

和が20になる組合せから, 互いに素な (a, b) の組をしらべていく.

a	1	3	7	9
b	19	17	13	11

$$\therefore (a, b) = (1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11)$$

$$\Rightarrow (A, B) = (6a, 6b) = (6, 114), (18, 102), (42, 78), (54, 66)$$