

反射テスト 整数 互いに素 応用 01

1. 次の自然数と互いに素であり、その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ. 例えば 4 の場合, 1, 2, 3, 4 の中で, 4 と互いに素な自然数は 1, 3 の 2 個である. (S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 45 秒, C 級 3 分)

(1) 6

(2) 8

(3) 40

(4) 120

2. 次の自然数と互いに素であり、その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ。例えば 4 の場合、1, 2, 3, 4 の中で、4 と互いに素な自然数は 1, 3 の 2 個である。(S 級 40 秒, A 級 1 分 15 秒, B 級 2 分, C 級 3 分 30 秒)

(1) 10

(2) 27

(3) 36

(4) 126

反射テスト 整数 互いに素 応用 01 解答解説

1. 次の自然数と互いに素であり、その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ。例えば4の場合、1, 2, 3, 4の中で、4と互いに素な自然数は1, 3の2個である。(S級30秒, A級1分, B級1分45秒, C級3分)

2の倍数は $\frac{1}{2}$ あるから、2で割り切れないものは $\frac{1}{2}$ 。3の倍数は $\frac{1}{3}$ あるから、3で割り切れないものは $\frac{2}{3}$ 。…
このように考えれば、互いに素な自然数が割合を用いて求められる。

★オイラー関数 (オイラーのファイ関数)

自然数 n が $a^p \times b^q \times c^r \times \dots$ と素因数分解できる場合、

n と互いに素である自然数の個数 $\varphi(n)$ は、

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

この $\varphi(n)$ をオイラー関数、もしくはオイラーのファイ関数という。

(1) 6

素因数分解すると、

$$6 = 2 \times 3$$

よって、6と互いに素にならない自然数は、

2や3の倍数なので、それらを消去。

1, 2, 3, 4, 5, 6

1と5 \Rightarrow 2個

☆別解

$$6 = 2 \times 3$$

オイラー関数を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi(6) &= 6 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 2\end{aligned}$$

(2) 8

素因数分解すると、

$$8 = 2^3$$

よって、8と互いに素にならない自然数は2の倍数。

1~8のうち2個に1個は2の倍数だから、

$8 \div 2 = 4$ 個は互いに素ではない。

$$8 - 4 = 4 \Rightarrow 4 \text{ 個}$$

☆別解

$$8 = 2^3$$

オイラー関数を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi(8) &= 8 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 8 \times \frac{1}{2} = 4\end{aligned}$$

(3) 40

素因数分解すると、

$$40 = 2^3 \times 5$$

オイラー関数を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi(40) &= 40 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 40 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \\ &= 16 \Rightarrow 16 \text{ 個}\end{aligned}$$

(4) 120

素因数分解すると、

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

オイラー関数を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi(120) &= 120 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 120 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \\ &= 32 \Rightarrow 32 \text{ 個}\end{aligned}$$

2. 次の自然数と互いに素であり、その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ。例えば4の場合、1, 2, 3, 4の中で、4と互いに素な自然数は1, 3の2個である。(S級40秒, A級1分15秒, B級2分, C級3分30秒)

(1) 10

素因数分解すると、

$$10 = 2 \times 5$$

よって、10と互いに素にならない自然数は、**2**や**5**の倍数なので、それらを消去。

1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10

$$1, 3, 7, 9 \Rightarrow \mathbf{4 \text{ 個}}$$

☆別解

$$10 = 2 \times 5$$

オイラー関数を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi(10) &= 10 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 4\end{aligned}$$

(2) 27

素因数分解すると、

$$27 = 3^3$$

よって、27と互いに素にならない自然数は**3**の倍数。

1~27のうち3個に1個は3の倍数だから、

27 ÷ 3 = 9個は互いに素ではない。

$$27 - 9 = 18 \Rightarrow \mathbf{18 \text{ 個}}$$

☆別解

$$27 = 3^3$$

オイラー関数を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi(27) &= 27 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= 27 \times \frac{2}{3} = 18\end{aligned}$$

(3) 36

素因数分解すると、

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

オイラー関数を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi(36) &= 36 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ &= 12 \Rightarrow \mathbf{12 \text{ 個}}\end{aligned}$$

(4) 126

素因数分解すると、

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

オイラー関数を用いると、

$$\begin{aligned}\varphi(126) &= 126 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{7}\right) \\ &= 126 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7} \\ &= 36 \Rightarrow \mathbf{36 \text{ 個}}\end{aligned}$$