反射テスト　整数　互いに素　応用　01

1.　次の自然数と互いに素であり, その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ. 例えば 4 の場合, 1, 2, 3, 4 の中で, 4 と互いに素な自然数は 1, 3 の 2 個である.（ S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 45 秒, C 級 3 分 ）

（1）　6

（2）　8

（3）　40

（4）　120

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の自然数と互いに素であり, その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ. 例えば 4 の場合, $1, 2, 3, 4$ の中で, 4 と互いに素な自然数は $1, 3$ の 2 個である. (S 級 40 秒, A 級 1 分 15 秒, B 級 2 分, C 級 3 分 30 秒)

(1) 10

(2) 27

(3) 36

(4) 126

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)

反射テスト　整数　互いに素　応用　01　解答解説

1.　次の自然数と互いに素であり, その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ. 例えば 4 の場合, 1, 2, 3, 4 の中で, 4 と互いに素な自然数は 1, 3 の 2 個である.（ S 級 30 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 45 秒, C 級 3 分 ）

2 の倍数は $\frac{1}{2}$ あるから, 2 で割り切れないものは $\frac{1}{2}$. 3 の倍数は $\frac{1}{3}$ あるから, 3 で割り切れないものは $\frac{2}{3}$. $\cdots$
このように考えれば, 互いに素な自然数が割合を用いて求められる.

★ オイラー関数 (オイラーのファイ関数)
自然数 n が $a^p \times b^q \times c^r \times \cdots$ と素因数分解できる場合,
n と互いに素である自然数の個数 $\varphi(n)$ は,

$$\boldsymbol{\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots}$$

この $\varphi(n)$ をオイラー関数, もしくはオイラーのファイ関数という.

(1)　6

素因数分解すると,
$6 = \mathbf{2} \times \mathbf{3}$.
よって, 6 と互いに素にならない自然数は,
2 や **3** の倍数なので, それらを消去.
$1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}$
1 と 5　$\Rightarrow$　**2 個**

☆別解
$6 = \mathbf{2} \times \mathbf{3}$
オイラー関数を用いると,

$$\begin{aligned}\varphi(6) &= 6 \times \left(1-\frac{1}{\mathbf{2}}\right) \times \left(1-\frac{1}{\mathbf{3}}\right)\\ &= 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 2\end{aligned}$$

(2)　8

素因数分解すると,
$8 = \mathbf{2}^3$
よって, 8 と互いに素にならない自然数は **2** の倍数.
1〜8 のうち 2 個に 1 個は 2 の倍数だから,
$8 \div 2 = 4$ 個 は互いに素ではない.
$8 - 4 = 4 \Rightarrow$　**4 個**

☆別解
$8 = \mathbf{2}^3$
オイラー関数を用いると,

$$\begin{aligned}\varphi(8) &= 8 \times \left(1-\frac{1}{\mathbf{2}}\right)\\ &= 8 \times \frac{1}{2} = 4\end{aligned}$$

(3)　40

素因数分解すると,
$40 = \mathbf{2}^3 \times \mathbf{5}$

オイラー関数を用いると,

$$\begin{aligned}\varphi(40) &= 40 \times \left(1-\frac{1}{\mathbf{2}}\right) \times \left(1-\frac{1}{\mathbf{5}}\right)\\ &= 40 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}\\ &= 16\end{aligned}$$

$\therefore$　**16 個**

(4)　120

素因数分解すると,
$120 = \mathbf{2}^3 \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}$

オイラー関数を用いると,

$$\begin{aligned}\varphi(120) &= 120 \times \left(1-\frac{1}{\mathbf{2}}\right) \times \left(1-\frac{1}{\mathbf{3}}\right) \times \left(1-\frac{1}{\mathbf{5}}\right)\\ &= 120 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\\ &= 32\end{aligned}$$

$\therefore$　**32 個**

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の自然数と互いに素であり, その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ. 例えば 4 の場合, 1, 2, 3, 4 の中で, 4 と互いに素な自然数は 1, 3 の 2 個である. (S 級 40 秒, A 級 1 分 15 秒, B 級 2 分, C 級 3 分 30 秒)

(1) 10

素因数分解すると,

$10 = \mathbf{2} \times \mathbf{5}$.

よって, 10 と互いに素にならない自然数は,

2 や **5** の倍数なので, それらを消去.

$1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}$

$1, 3, 7, 9 \quad \Rightarrow$ **4 個**

☆別解

$10 = \mathbf{2} \times \mathbf{5}$

オイラー関数を用いると,

$$\varphi(10) = 10 \times \left(1 - \frac{1}{\mathbf{2}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{\mathbf{5}}\right)$$

$$= 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 4$$

(2) 27

素因数分解すると,

$27 = \mathbf{3}^3$.

よって, 27 と互いに素にならない自然数は **3** の倍数.

1〜27 のうち 3 個に 1 個は 3 の倍数だから,

$27 \div 3 = 9$ 個 は互いに素ではない.

$27 - 9 = 18 \Rightarrow$ **18 個**

☆別解

$27 = \mathbf{3}^3$

オイラー関数を用いると,

$$\varphi(27) = 27 \times \left(1 - \frac{1}{\mathbf{3}}\right)$$

$$= 27 \times \frac{2}{3} = 18$$

(3) 36

素因数分解すると,

$36 = \mathbf{2}^2 \times \mathbf{3}^2$.

オイラー関数を用いると,

$$\varphi(36) = 36 \times \left(1 - \frac{1}{\mathbf{2}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{\mathbf{3}}\right)$$

$$= 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$= 12$$

$\therefore$ **12 個**

(4) 126

素因数分解すると,

$126 = \mathbf{2} \times \mathbf{3}^2 \times \mathbf{7}$

オイラー関数を用いると,

$$\varphi(126) = 126 \times \left(1 - \frac{1}{\mathbf{2}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{\mathbf{3}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{\mathbf{7}}\right)$$

$$= 126 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$$

$$= 36$$

$\therefore$ **36 個**

ⓒ 数学・算数を楽しむために (http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html)