

反射テスト 整数 知識 08 約数と倍数

1. 次の問に答えよ。(S級1分, A級2分, B級3分, C級4分)

(1) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ とする.
 $100! \div 99!$ はいくらか.

(2) $25!$ を計算したとき, 下何桁が0であるか.

(3) 28 の約数の総和を求めよ.

(4) 16 と互いに素であり, その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ.

2. 次の間に答えよ。(S級1分30秒, A級3分, B級5分, C級7分)

(1) $(21! - 20!) \div 20$ は何の階乗か.

(2) $100!$ を計算したとき, 下何桁が0であるか.

(3) 720の約数の総和を求めよ.

(4) 24と互いに素であり, その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ.

反射テスト 整数 知識 08 約数と倍数 解答解説

1. 次の間に答えよ。(S級1分, A級2分, B級3分, C級4分)

- (1) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ とする.
 $100! \div 99!$ はいくらか.

100 …答え

★階乗 (factorial)

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

- (2) $25!$ を計算したとき, 下何桁が0であるか.

下一桁に0が1つあると10で1回割り切れる.
下一桁に0が2つあると10で2回割り切れる.

…

10は素因数分解すると, 2×5

$25!$ を素因数分解したとき,

素因数2よりも5の方が少ないので,

この問題は5で何回割り切れるかということと同じ.

$$25 \div 5 = 5, \quad 5 \div 5 = 1$$

$$5 + 1 = 6 \text{ 桁} \quad \dots \text{答え}$$

★下の桁の0の個数は10で何回割り切れるかを表す.

- (3) 28の約数の総和を求めよ.

28を素因数分解すると,

$$2^2 \times 7$$

約数の総和は,

$$(1 + 2^1 + 2^2) \times (1 + 7) = 56 \quad \dots \text{答え}$$

★約数の総和

自然数 n が $a^p \times b^q \times c^r \times \dots$ と素因数分解できる場合,

約数の総和は,

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^p)$$

$$\times (1 + b + b^2 + \dots + b^q)$$

$$\times (1 + c + c^2 + \dots + c^r)$$

$$\times \dots$$

n の約数が, $a^{0 \sim p} \times b^{0 \sim q} \times c^{0 \sim r} \times \dots$

と表せるので, 総和の因数分解をすると上のようになる.

- (4) 16と互いに素であり, その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ.

素因数分解すると,

$$16 = 2^4$$

よって偶数以外で16以下の自然数は,

$$1, 3, 5, \dots, 15 \Rightarrow 8 \text{ 個} \quad \dots \text{答え}$$

★オイラー関数

自然数 n が $a^p \times b^q \times c^r \times \dots$ と素因数分解できる場合,

n と互いに素である自然数の個数 $\phi(n)$ は,

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

この $\phi(n)$ をオイラー関数という.

$$\phi(16) = 16 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 8 \text{ 個}$$

★オイラー (Euler)

数学史上最高の数学者. 業績は数論から幾何, 解析など数学のあらゆる分野に及ぶ.

2. 次の間に答えよ。(S級1分30秒, A級3分, B級5分, C級7分)

(1) $(21! - 20!) \div 20$ は何の階乗か.

$$\begin{aligned}n &= 20! \text{ とおくと, } 21! = 21n \\(21! - 20!) \div 20 &= (21n - n) \div 20 = n \\ \therefore & \mathbf{20! (20 \text{ の階乗})} \quad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$

(2) $100!$ を計算したとき, 下何桁が0であるか.

$$\begin{aligned}\text{この問題は5で何回割り切れるかということと同じ.} \\ 100 \div 5 &= 20 \\ 100 \div 5^2 &= 4 \\ 20 + 4 &= \mathbf{24 \text{ 桁}} \quad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$

(3) 720 の約数の総和を求めよ.

$$\begin{aligned}720 \text{ を素因数分解すると,} \\ 2^4 \times 3^2 \times 5 \\ \text{約数の総和は,} \\ (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) \times (1 + 3 + 3^2) \times (1 + 5) \\ = 31 \times 13 \times 6 = \mathbf{2418} \quad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$

★約数の総和

自然数 n が $a^p \times b^q \times c^r \times \cdots$ と素因数分解できる場合,

$$\begin{aligned}\text{約数の総和は,} \\ (1 + a + a^2 + \cdots + a^p) \\ \times (1 + b + b^2 + \cdots + b^q) \\ \times (1 + c + c^2 + \cdots + c^r) \\ \times \cdots\end{aligned}$$

n の約数が, $a^{0 \sim p} \times b^{0 \sim q} \times c^{0 \sim r} \times \cdots$
と表せるので, 総和の因数分解をすると上のようになる.

(4) 24 と互いに素であり, その自然数以下である自然数は何個あるか求めよ.

$$\begin{aligned}\text{素因数分解すると,} \\ 24 = \mathbf{2^3 \times 3} \\ 24 \text{ 以下の自然数は,} \\ 24 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ = 24 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \mathbf{8 \text{ 個}} \quad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$