反射テスト　整数　知識　05　公約数

1. 次の問に答えよ. **ただしどの問も約数は正とする.**（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1) 次の $\boxed{}$ に適当な数字や語句をうめよ.

18 の約数は小さい順に $\boxed{}$.

24 の約数は小さい順に $\boxed{}$.

18 と 24 の $\boxed{}$ は $1, 2, 3, 6$ である.

18 と 24 の最大公約数は $\boxed{}$ である.

6 の $\boxed{}$ は $1, 2, 3, 6$ である.

$\therefore$ $\boxed{}$ は $\boxed{}$ の $\boxed{}$.

(2) $m = 2^3 \times 5^4 \times 7$ と $n = 2^7 \times 5^2 \times 11$ がある.
m と n の最大公約数を求めよ.

(3) 「互いに素」とは最大公約数が 1 のことを言う.
a と b が互いに素であれば空欄に○を, 互いに素でなければ×を入れよ.

	例 1	例 2	例 3	問 1	問 2	問 3	問 4
a	3	14	24	11	19	18	34
b	5	21	25	15	19	35	85
互いに素	○	×	○				

(4) ある自然数 n がある. n と $n+3$ が互いに素であるとき, n は 3 の倍数ではないことを証明せよ.

(5) 次の $\boxed{}$ に適当な語句や文字式をうめよ.

A と B の最大公約数を g とする.
A も B も g で割り切れるので, 自然数 a , b を用いて商をそれぞれ a , b と表せば, $A = ga$, $B = gb$ となる.
このとき a と b は $\boxed{}$ である.

g) $\underline{A \quad B}$
　　$a \quad b$ $\Rightarrow$ A と B の最小公倍数は $\boxed{}$

2. 次の問に答えよ. **ただしどの問も約数は正とする.**（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1) 720 と 480 の公約数を求めよ.

(2) $m = 2^8 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$ と $n = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 11$ がある.
m と n の最大公約数を求めよ.

(3) 「互いに素」とは最大公約数が 1 のことを言う.
12 以下の自然数 a と 12 が互いに素であるとき,
自然数 a を全て求めよ.

(4) 互いに素な自然数 m , n がある. ($m > n$)
このとき $m+n$ と m は互いに素か.

(5) 最大公約数が 6, 最小公倍数が 120 になるような 2 つの
自然数の組を全てあげよ.

反射テスト　整数　知識　05　公約数　解答解説

1.　次の問に答えよ．**ただしどの問も約数は正とする．**（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

(1)　次の $\boxed{}$ に適当な数字や語句をうめよ．

18 の約数は小さい順に $\boxed{\mathbf{1, 2, 3, 6, 9, 18}}$．

24 の約数は小さい順に $\boxed{\mathbf{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}}$．

18 と 24 の $\boxed{\text{公約数}}$ は $1, 2, 3, 6$ である．

18 と 24 の最大公約数は $\boxed{\mathbf{6}}$ である．

6 の $\boxed{\text{約数}}$ は $1, 2, 3, 6$ である．

∴ $\boxed{\text{公約数}}$ は $\boxed{\text{最大公約数}}$ の $\boxed{\text{約数}}$ ．

★公約数（ *common divisor* ）
公約数は最大公約数の約数である．
言葉で覚えるのではなく，実例をイメージ化しよう．

(2)　$m = 2^3 \times 5^4 \times 7$ と $n = 2^7 \times 5^2 \times 11$ がある．
m と n の最大公約数を求めよ．

素因数	2	5	7	11
m	2^3	5^4	7^1	
n	2^7	5^2		11^1
指数が最小値	2^3	5^2		

最下段の 4 段目の積が最大公約数である．
$2^3 \times 5^2 = \mathbf{200}$　**…答え**

★最大公約数（ *the greatest common divisor* ）

(3)　「互いに素」とは最大公約数が 1 のことを言う．
a と b が互いに素であれば空欄に○を，互いに素でなければ×を入れよ．

	例 1	例 2	例 3	問 1	問 2	問 3	問 4
a	3	14	24	11	19	18	34
b	5	21	25	15	19	35	85
互いに素	○	×	○	○	**×**	○	**×**

★互いに素（ *coprime* ）
a と b が互いに素とは，a と b の最大公約数が 1 であることを表す．例えば問 4 の 34 と 85 は 17 という最大公約数をもつので互いに素ではない．

(4)　ある自然数 n がある．n と $n+3$ が互いに素であるとき，n は 3 の倍数ではないことを証明せよ．

n が 3 の倍数であると仮定する．
ある自然数 m を用れば $n = 3m$
これを代入して考えると，
　$3m$ と $3m+3$ は互いに素のはずだが，
どちらも 3 で割り切れるので互いに素ではない．
よって矛盾するから仮定は否定される．
すなわち n は 3 の倍数ではない．

★背理法（ *proof by contradiction* ）
上の証明法を背理法という．
「もしも〜やったらおかしいやろ？」という論理．
整数論の証明で頻出である．

(5)　次の $\boxed{}$ に適当な語句や文字式をうめよ．

A と B の最大公約数を g とする．
A も B も g で割り切れるので，自然数 a , b を用いて商をそれぞれ a , b と表せば，　$A = ga$ ，　$B = gb$ となる．
このとき a と b は $\boxed{\text{互いに素}}$ である．

$$g\ \underline{)\ A \quad B\ }$$
$$\quad a \quad b \quad \Rightarrow \quad A \text{ と } B \text{ の最小公倍数は } \boxed{\boldsymbol{gab}}$$

★最大公約数と最小公倍数の抽象化
A と B の最大公約数を g とすると，
$A = ga$, $B = gb$　（ a, b は互いに素 ）
最小公倍数は gab である．

2.　次の問に答えよ. **ただしどの問も約数は正とする.**（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1)　720 と 480 の公約数を求めよ.

公約数は最大公約数の約数である.
720 と 480 の最大公約数は 240
240 の約数は,

1	2	3	4	5	6	8	10	12	15
240	120	80	60	48	40	30	24	20	16

$\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15,}$
$\mathbf{16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240}$　**…答え**

(2)　$m = 2^8 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$ と $n = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 11$ がある.
m と n の最大公約数を求めよ.

素因数	2	3	5	7	11
m	2^8	3^2	5^3	7^1	
n	2^4	3^1	5^2		11^1
指数が最小値	2^4	3^1	5^2		

最下段の 4 段目の積が最大公約数である.
$2^4 \times 3 \times 5^2 = \mathbf{1200}$　**…答え**

(3)　「互いに素」とは最大公約数が 1 のことを言う.
12 以下の自然数 a と 12 が互いに素であるとき,
自然数 a を全て求めよ.

$12 = 2^2 \times 3$
よって, 2 でも 3 でも割り切れないものが答え.
$\mathbf{1, 5, 7, 11}$　**…答え**

(4)　互いに素な自然数 m , n がある. ($m > n$)
このとき $m+n$ と m は互いに素か.

互いに素である.　**…答え**
証明
背理法 を用いる.
$m+n$ と m が互いに素ではないと仮定する.
2 以上の最大公約数があるので g とおこう.
$m+n$ も m も g で割り切れるので,
互いに素な自然数 a , b を用いて,
$m+n = ga$, $m = gb$ と表せる.
差を考えると,
$(m+n) - m = n$
$\Leftrightarrow \quad ga - gb = n$
$\Leftrightarrow \quad g(a-b) = n$
つまり n は g で割り切れる.
これは m , n が互いに素という条件に反するので,
矛盾であるから, 仮定は否定される.

(5)　最大公約数が 6, 最小公倍数が 120 になるような 2 つの
自然数の組を全てあげよ.

2 つの自然数は, 最大公約数が 6 だから,
互いに素な自然数 a , b を用いて,
$6a$, $6b$ と表せる. ($a < b$ とする)
このとき最小公倍数は $6ab$ であるから,
$6ab = 120 \quad \Leftrightarrow \quad ab = 20$

a	1	2	4
b	20	10	5

$a = 2$, $b = 10$ は互いに素ではないので除外.
$(a, b) = (1, 20), (4, 5)$
$\Rightarrow \quad (6a, 6b) = \mathbf{(6, 120), (24, 30)}$　**…答え**