反射テスト　整数　知識　04　約数

1.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1)　6 の約数を正負含めて全てあげよ.

(2)　2^3 の正の約数を全てあげよ.
ただし 2 のべき乗の形で答えること.

(3)　ある素数 p に対して, $A = p^3$ とする.
A の正の約数を全てあげよ.

(4)　異なる 2 つの素数 p, q に対して, $A = p \times q$ とする.
A の正の約数を p, q を用いて表せ.

(5)　正の約数が 3 個である自然数を小さい順に 5 個言え.

(6)　$2^3 \times 3^4$ の正の約数の個数は何個か.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の問に答えよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1) 12 の約数を正負含めて全てあげよ.

(2) 3^5 の正の約数を全てあげよ.
ただし 3 のべき乗の形で答えること.

(3) ある素数 p に対して, $A = p^6$ とする.
A の正の約数を全てあげよ.

(4) 異なる 3 つの素数 p, q, r に対して, $A = pqr$ とする.
A の正の約数を p, q, r を用いて表せ.

(5) 平方数の正の約数の個数にはある特徴がある.
それを言え.

(6) $2^4 \times 3^5 \times 5^2$ の正の約数の個数は何個か.

© 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　整数　知識　04　約数　解答解説

1.　次の問に答えよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1)　6 の約数を正負含めて全てあげよ.

絶対値が小さい約数の候補から調べよう.
$+1$ は約数で, $6 \div 1 = +6 \quad \Rightarrow \quad +6$ も約数.
$+2$ は約数で, $6 \div 2 = +3 \quad \Rightarrow \quad +3$ も約数.
というように調べれば,

+1	**+2**	**−1**	**−2**
+6	**+3**	**−6**	**−3**

★約数（ *divisor* ）
上表のようにペアで探すのが早い. 負の約数も考えると,
約数の個数は正のときだけで考えたものの 2 倍になる.
☆何も明示がなければ負の約数も考えるのが厳密.

(2)　2^3 の正の約数を全てあげよ.
ただし 2 のべき乗の形で答えること.

2^3 は 2 で 3 回割り切れる自然数である.
ということは 1 以外に 2, 2^2, 2^3, でも割り切れる.
　$\mathbf{1, 2, 2^2, 2^3}$　**…答え**
こちらも可　$\mathbf{2^0, 2^1, 2^2, 2^3}$　**…答え**

★ 2 のべき乗の約数
2^n の約数は $1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n$
よって約数の個数は $n+1$ である.
また約数の総和は
$1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

(3)　ある素数 p に対して, $A = p^3$ とする.
A の正の約数を全てあげよ.

A は p で 3 回割り切れる自然数である.
ということは 1 以外に p, p^2, p^3 でも割り切れる.
　$\mathbf{1, p, p^2, p^3}$　**…答え**

★素数のべき乗の約数
p^n の約数は $1, p, p^2, p^3, \cdots, p^n$
よって約数の個数は $n+1$ である.
また約数の総和は
$1 + p + p^2 + \cdots p^n = \dfrac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$

(4)　異なる 2 つの素数 p, q に対して, $A = p \times q$ とする.
A の正の約数を p, q を用いて表せ.

文字式で数字の時と同様にすればいい.
1 は必ず約数であり, $A \div 1 = pq$ であるから pq も約数.
p は約数であり, $A \div p = q$ であるから q も約数.

1	$\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{pq}$	$\boldsymbol{q}$

$\Rightarrow$　$\mathbf{1, p, q, pq}$　**…答え**

★合成数（ *composite number* ）
2 つ以上の素数の積で表される自然数を合成数という.
最も簡単な例は $A = 6$ である.
$6 = 2 \times 3$ であり, 約数は $1, 2, 3, 6$

(5)　正の約数が 3 個である自然数を小さい順に 5 個言え.

1	$\boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{q}$

$\therefore$ 正の約数が 3 個なら $p = q$
ということは, $\Leftrightarrow A = p^2$　(素数の平方)
2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, $\cdots$
4, 9, 25, 49, 121　**…答え**

★素数の平方数の約数は 3 個
ある素数 p を用いれば, その平方は p^2
よってその約数は, $1, p, p^2$ の 3 個である.

(6)　$2^3 \times 3^4$ の正の約数の個数は何個か.

$A = 2^3 \times 3^4$ とおくと,
A の約数は $2^{0 \sim 3} \times 3^{0 \sim 4}$ と表せるので,
　$(3+1) \times (4+1) =$ **20 個**　**…答え**

★正の約数の個数と素因数分解
正の約数の個数は, 素因数分解したときの指数に 1 を足したもの積になる.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の問に答えよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分 ）

(1) 12 の約数を正負含めて全てあげよ.

絶対値が小さい約数の候補から調べよう.
$+1$ は約数で, $12 \div 1 = +12 \quad \Rightarrow \quad +12$ も約数.
$+2$ は約数で, $12 \div 2 = +6 \quad \Rightarrow \quad +6$ も約数.
というように調べれば,

$\boldsymbol{+1}$	$\boldsymbol{+2}$	$\boldsymbol{+3}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-2}$	$\boldsymbol{-3}$
$\boldsymbol{+12}$	$\boldsymbol{+6}$	$\boldsymbol{+4}$	$\boldsymbol{-12}$	$\boldsymbol{-6}$	$\boldsymbol{-4}$

(2) 3^5 の正の約数を全てあげよ.
ただし 3 のべき乗の形で答えること.

3^5 は 3 で 5 回割り切れる自然数である.
ということは 1 以外に 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5 でも割り切れる.

$\boldsymbol{1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5}$ **…答え**
こちらも可 $\boldsymbol{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5}$ **…答え**

(3) ある素数 p に対して, $A = p^6$ とする.
A の正の約数を全てあげよ.

A は p で 6 回割り切れる自然数である.
ということは 1 以外に p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6 でも割り切れる.

$\boldsymbol{1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6}$ **…答え**

(4) 異なる 3 つの素数 p, q, r に対して, $A = pqr$ とする.
A の正の約数を p, q, r を用いて表せ.

文字式で数字の時と同様にすればいい.
1 は約数であり, $A \div 1 = pqr$ であるから pqr も約数.
p は約数であり, $A \div p = qr$ であるから qr も約数.
q は約数であり, $A \div q = rp$ であるから rp も約数.
r は約数であり, $A \div r = pq$ であるから pq も約数.

$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$
$\boldsymbol{pqr}$	$\boldsymbol{qr}$	$\boldsymbol{rp}$	$\boldsymbol{pq}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{1, p, q, r, pq, qr, rp, pqr}$ **…答え**

(5) 平方数の正の約数の個数にはある特徴がある.
それを言え.

奇数である. **…答え**
1(5) から 3 個としては誤り.
素数以外の平方は 3 個よりも多くなる.
例えば 16 の約数は $1, 2, 4, 8, 16$.

★平方数（ *square number* ）
素因数分解の指数が全て偶数である.
また約数の個数は素因数分解したときの各指数 $+1$ の積になるので, 必ず奇数の積となる. 積も奇数であるから, 約数の個数も奇数.

(6) $2^4 \times 3^5 \times 5^2$ の正の約数の個数は何個か.

$A = 2^4 \times 3^5 \times 5^2$ とおくと,
A の約数は $2^{0\sim4} \times 3^{0\sim5} \times 5^{0\sim2}$ と表せるので,
$(4+1) \times (5+1) \times (2+1) = \textbf{90}$ **個** **…答え**

★正の約数の個数と素因数分解
正の約数の個数は, 素因数分解したときの指数に 1 を足したもの積になる.