

反射テスト 整数 知識 03 素数・素因数分解

1. 次の問に答えよ。(S級1分30秒, A級3分, B級4分30秒, C級6分)

- (1) 正の約数が2個の自然数を小さい順に5個答えよ.
- (2) 24を素因数分解せよ. また24が2で何回割り切れるか考えよ. ただし整数の範囲内で割り切れる場合を考えると.

- (3) $a = 2^8 \times 3^5$, $b = 2^7 \times 3^4$ である.
 a は b で割り切れるか. またその商はいくらか答えよ.
ただしここでの割り切れるとは,
整数の範囲で割り切れることを言うものとする.
- (4) $a^2 = 2^{14} \times 3^8$ である.
 a を求めよ. ただし a は正とし, 素因数分解の形で答えよ.

- (5) ある自然数の2乗を平方数という.
 2^5 は平方数か. また 2^6 は平方数か.
どちらの場合も平方数ならば何の平方かとも言え.
- (6) ある自然数の2乗を平方数という.
平方数の素因数分解に関する特徴を言え.

2. 次の間に答えよ。(S級1分30秒, A級3分, B級4分30秒, C級6分)

- (1) 100以下の正の整数の中で最大の素数を求めよ.
- (2) 800を素因数分解せよ. また800が2で何回割り切れるか考えよ. ただし整数の範囲内で割り切れる場合を考えること.

- (3) $a = 2^7 \times 3^5$, $b = 2^8 \times 3^4$ である.
 a は b で割り切れるか. またその商はいくらか答えよ.
ただしここでの割り切れるとは,
整数の範囲で割り切れることを言うものとする.
- (4) $a^3 = 2^{15} \times 3^6$ である.
 a を求めよ. ただし a は正とし, 素因数分解の形で答えよ.

- (5) ある自然数の3乗を立方数という.
 2^5 は立方数か. また 2^6 は立方数か.
どちらの場合も立方数ならば何の立方かとも言え.
- (6) ある自然数の3乗を立方数という.
立方数の素因数分解にはある特徴を言え.

反射テスト 整数 知識 03 素数・素因数分解 解答解説

1. 次の間に答えよ。(S級1分30秒, A級3分, B級4分30秒, C級6分)

(1) 正の約数が2個の自然数を小さい順に5個答えよ.

2, 3, 5, 7, 11 …答え

★素数 (*prime number*)

1とその数自身以外で割り切れない自然数を素数という。
ただし1は除く。

この結果問題のように正の約数が2個しかない自然数は素数である。こっちで定義した方がいい気がするが、上の定義が一般的。1を除くことによって、素因数分解の一意性が満たされる。

素数を負の数も含めて、 $\pm 2, \pm 3, \pm 5, \dots$ とすることもありますが、以後素数は正の整数とする。

(2) 24を素因数分解せよ。また24が2で何回割り切れるか考えよ。ただし整数の範囲内で割り切れる場合を考えること。

$2^3 \times 3$ …答え

「 $2^3 \times \sim$ 」の形から、2で**3回**割り切れる。

★素因数分解 (*factorization*)

素数の積の形で表すことを素因数分解という。素因数分解は積の順番を無視すればたった一通りの表し方しかない。これを素因数分解の一意性という。

(3) $a = 2^8 \times 3^5$, $b = 2^7 \times 3^4$ である。

a は b で割り切れるか。またその商はいくらか答えよ。
ただしここでの割り切れるとは、
整数の範囲で割り切れることを言うものとする。

$$a \div b = \frac{2^8 \times 3^5}{2^7 \times 3^4} = 2 \times 3 = 6$$

割り切れる。商は6 …答え

☆ $a^8 b^5 \div a^7 b^4$ はできるのに上の計算ができないということはないだろうか。そういう人は文字式の計算を特別視しすぎである。

(4) $a^2 = 2^{14} \times 3^8$ である。

a を求めよ。ただし a は正とし、素因数分解の形で答えよ。

$a = 2^7 \times 3^4$ …答え

☆ 自然数 a に対して、 $a^2 = 2^6$ ならば、

$$a^2 = a \times a$$

$$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$

より、 $a = 2^3$ といえる。

(5) ある自然数の2乗を平方数という。

2^5 は平方数か。また 2^6 は平方数か。
どちらの場合も平方数ならば何の平方かも言え。

$$2^5 = 32 \Rightarrow \text{平方数ではない。} \quad \dots \text{答え}$$

$$2^6 = 64 = 8^2 \Rightarrow \text{8の平方数。} \quad \dots \text{答え}$$

2^3 の平方でもよし。

★平方数 (*square number*)

自然数の2乗になる自然数のこと。

(6) ある自然数の2乗を平方数という。

平方数の素因数分解に関する特徴を言え。

例えば、 $3^m \times 5^n$ の平方数は、

$$(3^m \times 5^n)^2 = 3^{2m} \times 5^{2n} \text{ となる。}$$

このように指数が全て偶数になる。

素因数分解の指数が全て偶数になる。 …答え

★平方数 (*square number*)

素因数分解の指数が全て偶数である。

2. 次の問に答えよ。(S級1分30秒, A級3分, B級4分30秒, C級6分)

(1) 100以下の正の整数の中で最大の素数を求めよ.

97 …答え

★素数の性質

自然数が大きくなると素数の出現頻度は下がっていく.
 n 番目の素数を表す数式を作ることは数学者の夢である.

(2) 800を素因数分解せよ. また800が2で何回割り切れるか考えよ. ただし整数の範囲内で割り切れる場合を考えること.

$2^5 \times 5^2$ …答え

「 $2^5 \times \sim$ 」の形から, 2で5回割り切れる.

★素因数分解 (factorization)

素数の積の形で表すことを素因数分解という. 素因数分解は積の順番を無視すればたった一通りの表し方しかない. これを素因数分解の一意性がという.

(3) $a = 2^7 \times 3^5$, $b = 2^8 \times 3^4$ である.

a は b で割り切れるか. またその商はいくらか答えよ.
ただしここでの割り切れるとは,
整数の範囲で割り切れることを言うものとする.

$$a \div b = \frac{2^7 \times 3^5}{2^8 \times 3^4} = \frac{3}{2}$$

割り切れない. 商は $\frac{3}{2}$ …答え

☆割り切れないので商はないというのは間違い.
ただし余りを考慮して, 商は1, 余りは $2^7 \times 3^4$ としたものは正解としてよい.

(4) $a^3 = 2^{15} \times 3^6$ である.

a を求めよ. ただし a は正とし, 素因数分解の形で答えよ.

$a = 2^5 \times 3^2$ …答え

☆自然数 a に対して, $a^3 = 2^6$ ならば,

$$a^3 = a \times a \times a$$

$$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)$$

より, $a = 2^2$ といえる.

(5) ある自然数の3乗を立方数という.

2^5 は立方数か. また 2^6 は立方数か.
どちらの場合も立方数ならば何の立方かも言え.

$$2^5 = 32 \Rightarrow \text{立方数ではない.} \quad \dots\text{答え}$$

$$2^6 = 64 = 4^3 \Rightarrow \text{4の立方数.} \quad \dots\text{答え}$$

2^2 の立方でもよし.

★立方数 (cubic number)

自然数の3乗になる自然数のこと.
素因数分解の指数が3の倍数である.

(6) ある自然数の3乗を立方数という.

立方数の素因数分解にはある特徴を言え.

例えば, $3^m \times 5^n$ の立方数は,

$$(3^m \times 5^n)^3 = 3^{3m} \times 5^{3n} \text{ となる.}$$

このように指数が全て3の倍数になる.

素因数分解の指数が全て3の倍数である. …答え

★立方数 (cubic number)

素因数分解の指数が全て3の倍数である.