反射テスト　整数　知識　01〜08　確認テスト

（ S 級 10 分, A 級 15 分, B 級 20 分, C 級 30 分 ）

1.　次の問に答えよ.

(1)　$|n| \leqq 1000$ を満たす整数 n は何個あるか.

(2)　$a^2 = 2^{20} \times 3^{12}$ である.
a を求めよ. ただし a は正とし, 素因数分解の形で答えよ.

(3)　異なる 2 つの素数 p, q に対して, $A = p^2 \times q$ とする.
A の正の約数を p, q を用いて表せ.

(4)　$m = 2^5 \times 3^4 \times 5^4 \times 7^2$ と $n = 2^7 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$ がある.
m と n の最大公約数と最小公倍数を求めよ.
ただし, 素因数分解した形のままで書くこと.

(5)　「互いに素」とは最大公約数が 1 のことを言う.
a と b が互いに素であれば空欄に○を, 互いに素でなければ×を入れよ.

	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5
a	4	6	10	8	34
b	5	12	15	21	85
互いに素					

(6)　最大公約数が 3, 最小公倍数が 36 になるような 2 つの自然数の組を全てあげよ.

(7)　-13 を 4 で割ったときの余りを求めよ．

(8)　5 で割ると 1 余る自然数を小さい順に 4 個書け．

(9)　12 と 16 の公倍数で 200 未満の自然数は何個か．

(10)　3 で割って 1 余り，5 で割って 1 余る自然数で 100 に最も近い数を言え．

(11)　50! を計算したとき，下何桁が 0 であるか．

(12)　72 の正の約数の総和を求めよ．

(13) 整数 m と 0 ではない整数 n に対して, $\dfrac{m}{n}$ と表せる数を「有理数」と言う. 有理数ではない数の具体例を 1 つあげよ.

(14) 67 をある自然数で割ると余りが 7 になった. ある自然数を全て求めよ.

2. 次の式を満たす自然数 a, b を求めよ.

$$\frac{3}{5}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}}$$

3. 60 以下の自然数の中で, 2 でも 3 でも 5 でも割り切れないものは何個あるか.

4. 3^{103} の 1 の位の数を言え.

5. $ab-3a-2b+6=1$ を満たす整数の組 (a,b) を全て求めよ.

6. a を 60 以下の自然数とする. 次の問いに答えよ.

(1) 12 と a が互いに素であるような数 a は何個あるか.

(2) a と $a^2+13a+30$ が互いに素であるような数 a は何個あるか.

反射テスト　整数　知識　01〜08　確認テスト　解答解説

（ S 級 10 分，A 級 15 分，B 級 20 分，C 級 30 分 ）

1.　次の問に答えよ．

(1)　$|n| \leqq 1000$ を満たす整数 n は何個あるか．

絶対値が 1000 以下の整数が何個あるかという問題．
つまり，-1000 以上 1000 以下の整数の個数を求めたい．
正の整数は 1 から 1000 までで，1000 個
負の整数も同じく -1 から -1000 まで 1000 個
0 も入れて，$1000 \times 2 + 1 = 2001$

2001 個　…答え

☆別解　$1000 - (-1000) + 1 = 2001$

★絶対値記号　｜　｜
一般に x の絶対値を $|x|$ と表す．
$|3| = 3$，$|-2.5| = 2.5$ である．

(2)　$a^2 = 2^{20} \times 3^{12}$ である．
a を求めよ．ただし a は正とし，素因数分解の形で答えよ．

$\boldsymbol{a = 2^{10} \times 3^6}$　**…答え**

☆ 自然数 a に対して，$a^2 = 2^6$ ならば，
$a^2 = a \times a$
$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$\quad = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$
より，$a = 2^3$ といえる．

(3)　異なる 2 つの素数 p, q に対して，$A = p^2 \times q$ とする．
A の正の約数を p, q を用いて表せ．

文字式で数字の時と同様にすればいい．
1 は必ず約数であり，$A \div 1 = p^2q$ であるから p^2q も約数．
p は約数であり，$A \div p = pq$ であるから pq も約数．
q は約数であり，$A \div q = p^2$ であるから p^2 も約数．

1	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$
$\boldsymbol{p^2q}$	$\boldsymbol{pq}$	$\boldsymbol{p^2}$

$\Rightarrow$　$\boldsymbol{1, p, q, p^2, pq, p^2q}$　**…答え**

★合成数（ *composite number* ）
2 つ以上の素数の積で表される自然数を合成数という．

(4)　$m = 2^5 \times 3^4 \times 5^4 \times 7^2$ と $n = 2^7 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$ がある．
m と n の最大公約数と最小公倍数を求めよ．
ただし，素因数分解した形のままで書くこと．

素因数	2	3	5	7	11	
m	2^5	3^4	5^4	7^2		
n	2^7	3^3	5^2		11^1	
指数が最小	2^5	3^3	5^2			…最大公約数
指数が最大	2^7	3^4	5^4	7^2	11^1	…最小公倍数

最大公約数　$\boldsymbol{2^5 \times 3^3 \times 5^2}$　**…答え**
最小公倍数　$\boldsymbol{2^7 \times 3^4 \times 5^4 \times 7^2 \times 11}$　**…答え**

★最大公約数（ *the greatest common divisor* ）
★最小公倍数（ *the least common multiple* ）

(5)　「互いに素」とは最大公約数が 1 のことを言う．
a と b が互いに素であれば空欄に○を，互いに素でなければ×を入れよ．

	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5
a	4	6	10	8	34
b	5	12	15	21	85
互いに素	○	×	×	○	×

★互いに素（ *coprime* ）
a と b が互いに素とは，a と b の最大公約数が 1 であることを表す．

(6)　最大公約数が 3，最小公倍数が 36 になるような 2 つの自然数の組を全てあげよ．

2 つの自然数は，最大公約数が 3 だから，
互いに素な自然数 a, b を用いて，
$3a$，$3b$ と表せる．($a < b$ とする)
このとき最小公倍数は $3ab$ であるから，
$3ab = 36 \quad \Leftrightarrow \quad ab = 12$

a	1	2	3
b	12	6	4

$a = 2$，$b = 6$ は互いに素ではないので除外．
$(a, b) = (1, 12), (3, 4)$
$\Rightarrow$　$(3a, 3b) = \boldsymbol{(3, 36), (9, 12)}$　**…答え**

(7)　-13 を 4 で割ったときの余りを求めよ．

$-13 \div 4 = -3 \cdots -1 \quad \Rightarrow \quad$ 余り -1 これは誤り．
正解は，
$-13 = 4 \times (-4) + 3$
余り 3　…答え

★余り (剰余) (*remainder, residue*)
$0 \leqq$ 余り $<$ 割る数

(8)　5 で割ると 1 余る自然数を小さい順に 4 個書け．

1, 6, 11, 16　…答え

☆差が 5 の等差数列になる．
★等差数列 (*arithmetic sequence*)

(9)　12 と 16 の公倍数で 200 未満の自然数は何個か．

公倍数は最小公倍数の倍数である．　←★
12 と 16 の最小公倍数は 48　←☆
48 の倍数で 200 未満のものは，
$48, 96, 144, 192 \quad \Rightarrow$　**4 個　…答え**

★公倍数 (*common multiple*)
公倍数は最小公倍数の倍数である．

(10)　3 で割って 1 余り，5 で割って 1 余る自然数で 100 に最も近い数を言え．

3 で割って 1 余り　⇒　3 の倍数 + 1
5 で割って 1 余り　⇒　5 の倍数 + 1
よって両方にあてはまる自然数は，
3 と 5 の最小公倍数 15 の倍数 + 1
$15 \times 6 + 1 = 91$
$15 \times 7 + 1 = 106$
⇒　**106　…答え**

(11)　50! を計算したとき，下何桁が 0 であるか．

下一桁に 0 が 1 つあると 10 で 1 回割り切れる．
下一桁に 0 が 2 つあると 10 で 2 回割り切れる．
…
10 は素因数分解すると，2×5
25! を素因数分解したとき，
素因数 2 よりも 5 の方が少ないので，
この問題は 5 で何回割り切れるかということと同じ．
$50 \div 5 = 10$，$50 \div 25 = 2$
$10 + 2 =$ **12 個　…答え**

★下の桁の 0 の個数は 10 で何回割り切れるかを表す．

(12)　72 の正の約数の総和を求めよ．

72 を素因数分解すると，
$2^3 \times 3^2$
約数の総和は，
$(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \times (1 + 3 + 3^2)$
$= 15 \times 13 =$ **195　…答え**

★約数の総和
自然数 n が $a^p \times b^q \times c^r \times \cdots$ と素因数分解できる場合，
約数の総和は，
$$\left(1 + a + a^2 + \cdots + a^p\right) \times \left(1 + b + b^2 + \cdots + b^q\right) \times \left(1 + c + c^2 + \cdots + c^r\right) \times \cdots$$

n の約数が，$a^{0\sim p} \times b^{0\sim q} \times c^{0\sim r} \times \cdots$
と表せるので，総和の因数分解をすると上のようになる．

(13)　整数 m と 0 ではない整数 n に対して，$\dfrac{m}{n}$ と表せる数を「有理数」と言う．有理数ではない数の具体例を 1 つあげよ．

$\sqrt{2}$ や π など．　…答え

★無理数
有理数ではない数を「無理数」という．
$\sqrt{2}$ や π のように分数で表せず，
小数でも規則的な法則がない無限小数になる．

(14)　67 をある自然数で割ると余りが 7 になった．ある自然数を全て求めよ．

ある自然数を n，そのときの商を a とおくと，

$$67 = na + 7$$

$$\Leftrightarrow \quad 60 = na$$

よって，n は 60 の約数であるから，

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
60	**30**	**20**	**15**	**12**	**10**

n は余りの 7 より大きいから，
10, 12, 15, 20, 30, 60　…答え

★60
偉大な自然数である．1 から 6 までの自然数全てで割り切れるため，昔からよく使われた．古代バビロニアでは 60 進数が使われたという．今でも時間表記の 60 進数で表すが，その名残とも言われる．

2.　次の式を満たす自然数 a, b を求めよ．

$$\frac{3}{5} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}}}$$

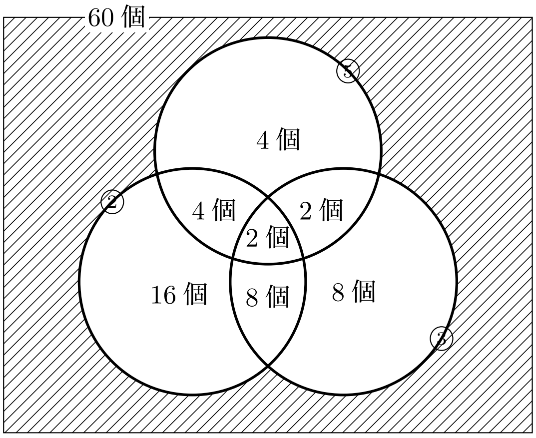
$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}} \qquad \text{←逆数をとった}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = a + \frac{1}{b} \qquad \text{←逆数をとった}$$

$\dfrac{3}{2} = 1\dfrac{1}{2}$ であるから，　$\boldsymbol{a = 1}$，$\boldsymbol{b = 2}$　**…答え**

3.　60 以下の自然数の中で，2 でも 3 でも 5 でも割り切れないものは何個あるか．



★公倍数は最小公倍数の倍数

2 の倍数	$60 \div 2 = 30$ 個	…②
3 の倍数	$60 \div 3 = 20$ 個	…③
5 の倍数	$60 \div 5 = 12$ 個	…⑤
2 と 3 の公倍数	$60 \div 6 = 10$ 個	
3 と 5 の公倍数	$60 \div 15 = 4$ 個	
5 と 2 の公倍数	$60 \div 10 = 6$ 個	
2 と 3 と 5 の公倍数	$60 \div 30 = 2$ 個	

以上を左図のように **ベン図** におこす．

☆斜線部分が 2 でも 3 でも 5 でも割り切れないものを表すから，
$\therefore$　$60 - (30 + 10 + 4) =$ **16 個　…答え**

4. 3^{103} の 1 の位の数を言え.

	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
1 の位	3	9	7	1	3

$3, 9, 7, 1$ という 4 個の数字の繰り返しであるから,
$103 \div 4 = 25 \cdots 3$ $\Rightarrow$ 表で 3 番目の **7** **…答え**

5. $ab - 3a - 2b + 6 = 1$ を満たす整数の組 (a, b) を全て求めよ.

★因数分解 = 素因数分解
与式 $\Leftrightarrow$ $(a-2)(b-3) = 1$
$\therefore$ $(a-2, b-3) = (1, 1),\ (-1, -1)$
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(a, b) = (3, 4), (1, 2)}$ **…答え**

6. a を 60 以下の自然数とする. 次の問いに答えよ.

(1) 12 と a が互いに素であるような数 a は何個あるか.

$12 = 2^2 \times 3$ より, a は 2 の倍数でも, 3 の倍数でもないことがわかる.

60 以下の 2 の倍数は, $60 \div 2 = 30$ 個
60 以下の 3 の倍数は, $60 \div 3 = 20$ 個
このままだと, 6 の倍数が重複しているので,
60 以下の 6 の倍数は, $60 \div 6 = 10$ 個

$30 + 20 - 10 = 40$ 個 $\Rightarrow$ 40 個の数は 2 か 3 の倍数 $\Rightarrow$ $60 - 40 = 20$ $\Rightarrow$ **20 個** **…答え**

(2) a と $a^2 + 13a + 30$ が互いに素であるような数 a は何個あるか.

$a^2 + 13a + 30 = (a+3)(a+10)$

すなわち a と $(a+3)(a+10)$ が互いに素になればよい.

① a と $a+3$ が互いに素になるには, a が 3 の倍数であってはならない.
(なぜかわからなければ, a に 1 から順に自然数を代入して考えてみよ.)
② a と $a+10$ が互いに素になるには, a が 10 の倍数であってはならない.
a は 2 の倍数でも 5 の倍数でもない.

以上の結果から, 3 の問と同じ結果になるので, **16 個** **…答え**