反射テスト　整数　不定方程式　03

1.　次の方程式を満たす整数 m，n を求めよ.（ S 級 3 分 30 秒，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 13 分 ）

(1)　$51m + 32n = 1$

(2)　$51m + 32n = 7$

2.　次の方程式を満たす整数 m，n を求めよ．(S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分)

(1)　$167m + 63n = 1$

(2)　$167m + 63n = 11$

反射テスト　整数　不定方程式　03　解答解説

1.　次の方程式を満たす整数 m，n を求めよ.（ S 級 3 分 30 秒，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 13 分 ）

★ 不定方程式 $am+bn=c$ の解き方

① 解 (m,n) を 1 つ見つける.　　← ☆特定解・特殊解という

② 他の整数 k を用いて，m や n を表す.　　← ☆一般解という

☆注意 1　**解の表し方は幾通りもある** ので，答え合わせのときに注意が必要である.

☆注意 2　a,b が互いに素であれば $c=1$ の場合の解は必ずある.

☆注意 3　a,b が互いに素ではない場合，c は a と b の最大公約数の倍数のときしか解けない.

☆注意 4　特殊解がすぐに見つかりそうにない場合は，ユークリッドの互除法から逆算.

(1)　$51m+32n=1$

★不定方程式はまず特殊解.

すぐに見つからない場合は以下のように互除法を用いる.

★ ユークリッドの互除法

$51=32\times1+19$　…①

$32=19\times1+13$　…②

$19=13\times1+6$　…③

$13=6\times2+1$　…④

ゆえに，51 と 32 は互いに素. (最大公約数が 1)

①　⇔　$19=51-32$

②　⇔　$13=32-19$

③　⇔　$6=19-13$

以上から，

$13=32-(51-32)=32\times2-51$

$6=(51-32)-(32\times2-51)$

$\quad=51\times2-32\times3$

これらを④に代入して，

$\quad 32\times2-51=(51\times2-32\times3)\times2+1$

⇔　$32\times2-51-51\times4+32\times6=1$

⇔　$51\times(-5)+32\times8=1$

　特殊解は　$(m,n)=(-5,8)$

$$\begin{array}{rrcrcrcr} & 51 & m & + & 32 & n & = & 1 \\ -) & 51 & \times(-5) & + & 32 & \times 8 & = & 1 \\ \hline & 51 & (m+5) & + & 32 & (n-8) & = & 0 \end{array}$$

よって　$51(m+5)=32(8-n)$ …⑤

51 と 32 が互いに素であるから，⑤は $51,32$ の公倍数.

つまり⑤は $51\times32\times k$　（k は整数）　とおけるので，

$\quad 51(m+5)=51\times32\times k$

⇔　$m+5=32k$　⇔　$m=32k-5$.

$\quad 32(8-n)=51\times32\times k$

⇔　$8-n=51k$　⇔　$n=8-51k$.

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{m=32k-5} \\ \boldsymbol{n=8-51k} \end{cases}$$　**（ ただし k は整数 ）**

(2)　$51m+32n=7$

★不定方程式はまず特殊解.

(1) から，

$\quad 51\times(-5)+32\times8=1$

両辺を 7 倍すれば (2) の特殊解がわかる.　←☆

$\quad 51\times(-35)+32\times56=7$

　特殊解は　$(m,n)=(-35,56)$

$$\begin{array}{rrcrcrcr} & 51 & m & + & 32 & n & = & 7 \\ -) & 51 & \times(-35) & + & 32 & \times 56 & = & 7 \\ \hline & 51 & (m+35) & + & 32 & (n-56) & = & 0 \end{array}$$

よって　$51(m+35)=32(56-n)$ …⑥

51 と 32 が互いに素であるから，⑥は $51,32$ の公倍数.

つまり⑥は $51\times32\times k$　（k は整数）　とおけるので，

$\quad 51(m+35)=51\times32\times k$

⇔　$m+35=32k$　⇔　$m=32k-35$.

$\quad 32(56-n)=51\times32\times k$

⇔　$56-n=51k$　⇔　$n=56-51k$.

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{m=32k-35} \\ \boldsymbol{n=56-51k} \end{cases}$$　**（ ただし k は整数 ）**

☆確かめ

$k=1$　⇒　$(m,n)=(32-35,56-51)=(-3,5)$

　与方程式の左辺 $=51\times(-3)+32\times5$

$\quad\quad\quad\quad\quad =-153+160=7$　　　OK！

☆ポイント

$ax+by=1$ の特殊解 (x_1,y_1) が分かっているのであれば，

$ax+by=c$ の特殊解は (cx_1,cy_1) である.

2. 次の方程式を満たす整数 m, n を求めよ.(S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分)

★ 不定方程式 $am+bn=c$ の解き方

① 解 (m,n) を 1 つ見つける. ← ☆特定解・特殊解という

② 他の整数 k を用いて, m や n を表す. ← ☆一般解という

☆注意 1 **解の表し方は幾通りもある** ので, 答え合わせのときに注意が必要である.

☆注意 2 a,b が互いに素であれば $c=1$ の場合の解は必ずある.

☆注意 3 a,b が互いに素ではない場合, c は a と b の最大公約数の倍数のときしか解けない.

☆注意 4 特殊解がすぐに見つかりそうにない場合は, ユークリッドの互除法から逆算.

(1) $167m+63n=1$

★不定方程式はまず特殊解.

すぐに見つからない場合は以下のように互除法を用いる.

★ ユークリッドの互除法

$167=63\times 2+41$ ⋯①

$63=41\times 1+22$ ⋯②

$41=22\times 1+19$ ⋯③

$22=19\times 1+3$ ⋯④

$19=3\times 6+1$ ⋯⑤

ゆえに, 167 と 63 は互いに素. (最大公約数が 1)

① ⇔ $41=167-63\times 2$

② ⇔ $22=63-41$

③ ⇔ $19=41-22$

④ ⇔ $3=22-19$

以上から,

$22=63-(167-63\times 2)=63\times 3-167$

$19=(167-63\times 2)-(63\times 3-167)=167\times 2-63\times 5$

$3=(63\times 3-167)-(167\times 2-63\times 5)=63\times 8-167\times 3$

これらを⑤に代入して,

$167\times 2-63\times 5=(63\times 8-167\times 3)\times 6+1$

⇔ $167\times 2-63\times 5=63\times 48-167\times 18+1$

⇔ $167\times 20-63\times(-53)=1$

特殊解は $(m,n)=(20,-53)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 167 & m & + & 63 & n & = 1 \\ -) & 167 & \times 20 & + & 63 & \times(-53) & = 1 \\ \hline & 167 & (m-20) & + & 63 & (n+53) & = 0 \end{array}$$

よって $167(20-m)=63(n+53)$ ⋯⑥

167 と 63 が互いに素であるから, ⑥は 167, 63 の公倍数.

つまり⑥は $167\times 63\times k$ (k は整数) とおけるので,

$167(20-m)=167\times 63\times k$

⇔ $20-m=63k$ ⇔ $m=20-63k$.

$63(n+53)=167\times 63\times k$

⇔ $n+53=167k$ ⇔ $n=167k-53$.

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{m=20-63k} \\ \boldsymbol{n=167k-53} \end{cases}$$ **(ただし k は整数)**

(2) $167m+63n=11$

★不定方程式はまず特殊解.

(1) から,

$167\times 20+63\times(-53)=1$

両辺を 11 倍すれば (2) の特殊解がわかる. ←☆

$167\times 220+63\times(-583)=9$

特殊解は $(m,n)=(220,-583)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 167 & m & + & 63 & n & = 11 \\ -) & 167 & \times 220 & + & 63 & \times(-583) & = 11 \\ \hline & 167 & (m-220) & + & 63 & (n+583) & = 0 \end{array}$$

よって $167(220-m)=63(n+583)$ ⋯⑦

167 と 63 が互いに素であるから, ⑥は 167, 63 の公倍数.

つまり⑦は $167\times 63\times k$ (k は整数) とおけるので,

$167(220-m)=167\times 63\times k$

⇔ $220-m=63k$ ⇔ $m=220-63k$.

$63(n+583)=167\times 63\times k$

⇔ $n+583=167k$ ⇔ $n=167k-583$.

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{m=220-63k} \\ \boldsymbol{n=167k-583} \end{cases}$$ **(ただし k は整数)**

☆確かめ

$k=1$ ⇒ $(m,n)=(220-63,167-583)=(157,-416)$

与方程式の左辺 $=167\times 157+63\times(-416)$

$=26219-26208=11$ OK !

☆ポイント

$ax+by=1$ の特殊解 (x_1,y_1) が分かっているのであれば,

$ax+by=c$ の特殊解は (cx_1,cy_1) である.