

反射テスト 整数 不定方程式 02

1. 次の方程式を満たす整数 m , n を求めよ. (S 級 2 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 10 分, C 級 15 分)

(1) $159m + 49n = 1$

(2) $159m + 49n = 5$

2. 次の方程式を満たす整数 m , n を求めよ. (S 級 2 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 9 分, C 級 13 分)

(1) $92m + 197n = 1$

(2) $92m + 197n = 10$

反射テスト 整数 不定方程式 02 解答解説

1. 次の方程式を満たす整数 m, n を求めよ。(S級 2分 30秒, A級 5分, B級 10分, C級 15分)

★不定方程式 $am + bn = c$ の解き方

- ① 解 (m, n) を1つ見つける。 ← ☆特定解・特殊解という
- ② 他の整数 k を用いて, m や n を表す。 ← ☆一般解という

☆注意1 解の表し方は幾通りもあるので, 答え合わせのときに注意が必要である。

☆注意2 a, b が互いに素であれば $c = 1$ の場合の解は必ずある。

☆注意3 a, b が互いに素ではない場合, c は a と b の最大公約数の倍数のときしか解けない。

☆注意4 特殊解がすぐに見つかりそうにない場合は, ユークリッドの互除法から逆算。

(1) $159m + 49n = 1$

(2) $159m + 49n = 5$

★不定方程式はまず特殊解。

すぐに見つからない場合は以下のように互除法を用いる。

★ユークリッドの互除法

$$159 = 49 \times 3 + 12 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$49 = 12 \times 4 + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$12 = 1 \times 12$$

ゆえに, 159 と 49 は互いに素。(最大公約数が1)

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 12 = 159 - 49 \times 3$$

これを②に代入して,

$$49 = (159 - 49 \times 3) \times 4 + 1$$

$$\Leftrightarrow 49 - 159 \times 4 + 49 \times 12 = 1$$

$$\Leftrightarrow 159 \times (-4) + 49 \times 13 = 1$$

$$\text{特殊解は } (m, n) = (-4, 13)$$

$$\begin{array}{r} 159 \quad m \quad + \quad 49 \quad n \quad = \quad 1 \\ -) \quad 159 \quad \times(-4) \quad + \quad 49 \quad \times 13 \quad = \quad 1 \\ \hline 159 \quad (m+4) \quad + \quad 49 \quad (n-13) \quad = \quad 0 \end{array}$$

$$\text{よって } 159(m+4) = 49(13-n) \quad \cdots \textcircled{3}$$

159 と 49 が互いに素であるから, ③は 159, 49 の公倍数。

つまり③は $159 \times 49 \times k$ (k は整数) とおけるので,

$$159(m+4) = 159 \times 49 \times k$$

$$\Leftrightarrow m+4 = 49k \quad \Leftrightarrow m = 49k - 4$$

$$49(13-n) = 159 \times 49 \times k$$

$$\Leftrightarrow 13-n = 159k \quad \Leftrightarrow n = 13 - 159k$$

$$\therefore \begin{cases} m = 49k - 4 \\ n = 13 - 159k \end{cases} \quad (\text{ただし } k \text{ は整数})$$

☆確かめ

$$k = 1 \Rightarrow (m, n) = (49 - 4, 13 - 159) = (45, -146)$$

$$\text{与方程式の左辺} = 159 \times 45 + 49 \times (-146)$$

$$= 7155 - 7154 = 1 \quad \text{OK!}$$

☆別解 特殊解をゴリゴリ見つけてもよい。

159 の倍数 159, 318, 477, 636, 795, 954, 1113, …

49 の倍数 49, 98, 147, 196, 245, 294, 343,

392, 441, 490, 539, 588, 637, …

$$636 \text{ と } 637 \text{ の差が } 1 \Rightarrow \text{特殊解は } (m, n) = (-4, 13)$$

★不定方程式はまず特殊解。

(1) から,

$$159 \times (-4) + 49 \times 13 = 1$$

両辺を 5 倍すれば (2) の特殊解がわかる。 ← ☆

$$159 \times (-20) + 49 \times 65 = 5$$

$$\text{特殊解は } (m, n) = (-20, 65)$$

$$\begin{array}{r} 159 \quad m \quad + \quad 49 \quad n \quad = \quad 5 \\ -) \quad 159 \quad \times(-20) \quad + \quad 49 \quad \times 65 \quad = \quad 5 \\ \hline 159 \quad (m+20) \quad + \quad 49 \quad (n-65) \quad = \quad 0 \end{array}$$

$$\text{よって } 159(m+20) = 49(65-n) \quad \cdots \textcircled{4}$$

159 と 49 が互いに素であるから, ④は 159, 49 の公倍数。

つまり④は $159 \times 49 \times k$ (k は整数) とおけるので,

$$159(m+20) = 159 \times 49 \times k$$

$$\Leftrightarrow m+20 = 49k \quad \Leftrightarrow m = 49k - 20$$

$$49(65-n) = 159 \times 49 \times k$$

$$\Leftrightarrow 65-n = 159k \quad \Leftrightarrow n = 65 - 159k$$

$$\therefore \begin{cases} m = 49k - 20 \\ n = 65 - 159k \end{cases} \quad (\text{ただし } k \text{ は整数})$$

☆確かめ

$$k = 1 \Rightarrow (m, n) = (49 - 20, 65 - 159) = (29, -94)$$

$$\text{与方程式の左辺} = 159 \times 29 + 49 \times (-94)$$

$$= 4611 - 4606 = 5 \quad \text{OK!}$$

☆ポイント

$ax + by = 1$ の特殊解 (x_1, y_1) が分かっているのであれば,

$ax + by = c$ の特殊解は (cx_1, cy_1) である。

2. 次の方程式を満たす整数 m, n を求めよ。(S級 2分30秒, A級 5分, B級 9分, C級 13分)

★不定方程式 $am + bn = c$ の解き方

- ① 解 (m, n) を1つ見つける。 ← ☆特定解・特殊解という
 ② 他の整数 k を用いて, m や n を表す。 ← ☆一般解という

☆注意1 解の表し方は幾通りもあるので, 答え合わせのときに注意が必要である。

☆注意2 a, b が互いに素であれば $c = 1$ の場合の解は必ずある。

☆注意3 a, b が互いに素ではない場合, c は a と b の最大公約数の倍数のときしか解けない。

☆注意4 特殊解がすぐに見つかりそうにない場合は, ユークリッドの互除法から逆算。

(1) $92m + 197n = 1$

(2) $92m + 197n = 10$

★不定方程式はまず特殊解。

すぐに見つからない場合は以下のように互除法を用いる。

★ユークリッドの互除法

$$197 = 92 \times 2 + 13 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$92 = 13 \times 7 + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$13 = 1 \times 13$$

ゆえに, 197 と 92 は互いに素。(最大公約数が1)

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 13 = 197 - 92 \times 2$$

これを②に代入して,

$$92 = (197 - 92 \times 2) \times 7 + 1$$

$$\Leftrightarrow 92 - 197 \times 7 + 92 \times 14 = 1$$

$$\Leftrightarrow 92 \times 15 + 197 \times (-7) = 1$$

$$\text{特殊解は } (m, n) = (15, -7)$$

$$\begin{array}{r} 92 \quad m \quad + \quad 197 \quad n \quad = \quad 1 \\ -) \quad 92 \quad \times 15 \quad + \quad 197 \quad \times (-7) \quad = \quad 1 \\ \hline 92 \quad (m - 15) \quad + \quad 197 \quad (n + 7) \quad = \quad 0 \end{array}$$

$$\text{よって } 92(15 - m) = 197(n + 7) \quad \cdots \textcircled{3}$$

92 と 197 が互いに素であるから, ③は 92, 197 の公倍数。

つまり③は $92 \times 197 \times k$ (k は整数) とおけるので,

$$92(15 - m) = 92 \times 197 \times k$$

$$\Leftrightarrow 15 - m = 197k \quad \Leftrightarrow m = 15 - 197k .$$

$$197(n + 7) = 92 \times 197 \times k$$

$$\Leftrightarrow n + 7 = 92k \quad \Leftrightarrow n = 92k - 7 .$$

$$\therefore \begin{cases} m = 15 - 197k \\ n = 92k - 7 \end{cases} \quad (\text{ただし } k \text{ は整数})$$

☆確かめ

$$k = 1 \Rightarrow (m, n) = (15 - 197, 92 - 7) = (-182, 85)$$

$$\begin{aligned} \text{与方程式の左辺} &= 92 \times (-182) + 197 \times 85 \\ &= -16744 + 16745 = 1 \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

☆別解 特殊解をゴリゴリ見つけてもよい。

92 と 197 が互いに素であるから, 特殊解を1つ見つければよい。

92 の倍数 92, 184, 276, 368, 460, 552, 644, 736, 828, 920, 1012, 1104, 1196, 1288, 1380, …

197 の倍数 197, 394, 591, 788, 985, 1182, 1379, …

1380 と 1379 の差が1 \Rightarrow 特殊解は $(m, n) = (15, -7)$

★不定方程式はまず特殊解。

(1) から,

$$92 \times 15 + 197 \times (-7) = 1$$

両辺を10倍すれば(2)の特殊解がわかる。 ← ☆

$$92 \times 150 + 197 \times (-70) = 10$$

$$\text{特殊解は } (m, n) = (150, -70)$$

$$\begin{array}{r} 92 \quad m \quad + \quad 197 \quad n \quad = \quad 10 \\ -) \quad 92 \quad \times 150 \quad + \quad 197 \quad \times (-70) \quad = \quad 10 \\ \hline 92 \quad (m - 150) \quad + \quad 197 \quad (n + 70) \quad = \quad 0 \end{array}$$

$$\text{よって } 92(150 - m) = 197(n + 70) \quad \cdots \textcircled{4}$$

92 と 197 が互いに素であるから, ④は 92, 197 の公倍数。つまり④は $92 \times 197 \times k$ (k は整数) とおけるので,

$$92(150 - m) = 92 \times 197 \times k$$

$$\Leftrightarrow 150 - m = 197k \quad \Leftrightarrow m = 150 - 197k .$$

$$197(n + 70) = 92 \times 197 \times k$$

$$\Leftrightarrow n + 70 = 92k \quad \Leftrightarrow n = 92k - 70 .$$

$$\therefore \begin{cases} m = 150 - 197k \\ n = 92k - 70 \end{cases} \quad (\text{ただし } k \text{ は整数})$$

☆確かめ

$$k = 1 \Rightarrow (m, n) = (150 - 197, 92 - 70) = (-47, 22)$$

$$\begin{aligned} \text{与方程式の左辺} &= 92 \times (-47) + 197 \times 22 \\ &= -4324 + 4334 = 10 \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

☆ポイント

$ax + by = 1$ の特殊解 (x_1, y_1) が分かっているのであれば, $ax + by = c$ の特殊解は (cx_1, cy_1) である。